

6. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΩΝ ΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΜΟΝΩΤΗΡΩΝ

6.1 Γενικά

Οι σεισμικοί μονωτήρες προσομοιώνονται με στοιχεία που παρουσιάζουν ελαστική, ανελαστική ή υστερητική ιξώδη συμπεριφορά και συμπεριφορά τριβής.

1. **Ελαστικά στοιχεία** - Χρησιμοποιούνται για να προσομοιώσουν προσεγγιστικά την συμπεριφορά των ελαστομεταλλικών εφεδράνων.
2. **Υστερητικά στοιχεία** - Χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση της συμπεριφοράς των ελαστομεταλλικών εφεδράνων υψηλής απόσβεσης, των L.R.B. (ελαστομεταλλικά εφέδρανα με πυρήνα μολύβδου) και των μαλακών μεταλλικών αποσβεστήρων με μορφή στρεπτικών ή καμπτικών δοκών.
3. **Στοιχεία με συμπεριφορά τριβής** - Χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση της συμπεριφοράς διεπιφανειών από Teflon και χάλυβα καθώς και άλλων επιφανειών που ολισθαίνουν η μία πάνω στην άλλη αναπτύσσοντας τριβή.
4. **Ιξώδη στοιχεία** - Προσομοιάζουν την απορρόφηση ενέργειας στους ιξωελαστικούς και στους υδραυλικούς αποσβεστήρες.

Στη συνέχεια εξετάζονται πιο αναλυτικά τα στοιχεία υστέρησης και τριβής και παρουσιάζεται η μαθηματική προσομοίωση της συμπεριφοράς τους.

6.2 Μονοδιάστατα Στοιχεία Υστέρησης

Αρκετά προσομοιώματα έχουν χρησιμοποιηθεί για να διατυπώσουν την σχέση δύναμης-παραμόρφωσης των ανελαστικών δομικών στοιχείων που υποβάλλονται σε αρμονικά ή άλλα δυναμικά φορτία. Οι δύο διαφορετικοί τύποι προσομοιωμάτων που έχουν αναπτυχθεί είναι α) Τα προσομοιώματα που περιγράφονται από αλγεβρικές εξισώσεις, όπως το "Ramberg -Osgood" , διγραμμικά και ελαστοπλαστικά προσομοιώματα και β) Τα προσομοιώματα που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις, όπως το προσομοίωμα του Bouc-Wen.

Τα πλεονεκτήματα των προσομοιωμάτων που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις είναι τα εξής:

1. Ικανότητα να αναπαράγουν πληθώρα υστερητικών συμπεριφορών. Αυτή η ποικιλία συμπεριφορών μπορεί να παραχθεί με την κατάλληλη επιλογή διαφόρων παραμέτρων των διαφορικών εξισώσεων.
2. Μεγάλη υπολογιστική ικανότητα, η οποία προκύπτει από το γεγονός ότι ο καθορισμός των βρόχων υστέρησης στα προσομοιώματα αυτά δεν είναι απαραίτητος.

Το τροποποιημένο βισκοπλαστικό προσομοίωμα, που χρησιμοποιείται για την προσομοίωση των στοιχείων υστέρησης, είναι μια επέκταση του προσομοιώματος του Wen. Το προσομοίωμα αυτό υιοθετήθηκε εξαιτίας της υπολογιστικής του ικανότητας. Σύμφωνα με αυτό το προσομοίωμα, η δύναμη επαναφοράς F_h , σε ένα σύστημα υστέρησης, περιγράφεται από την σχέση:

$$F_h = \alpha \frac{F^y}{U^y} U + (1 - \alpha) F_y Z \quad (6.1)$$

Όπου, α είναι ο λόγος της μετελαστικής προς την ελαστική δυσκαμψία, F^y η δύναμη διαρροής, U^y η μετακίνηση διαρροής, U η μετακίνηση και Z μία αδιάστατη ποσότητα υστέρησης. Ο πρώτος όρος της δύναμης υστέρησης παριστάνει την γραμμική ελαστική συνιστώσα και ο δεύτερος την ελαστοπλαστική υστερητική συνιστώσα.

Η αδιάστατη ποσότητα υστέρησης Z ελέγχεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dZ}{dt} U^y = \left\{ A - |Z|^n (\gamma \text{Sign}(\dot{U}Z) + \beta) \right\} \dot{U} \quad (6.2)$$

όπου γ , β , η και A , αδιάστατες παράμετροι που ελέγχουν το σχήμα των βρόγχων υστέρησης, και $\dot{U} = \frac{dU}{dt}$ η ταχύτητα.

6.3 Ανελαστική Διαξονική Συμπεριφορά των Στοιχείων Υστέρησης

Αναλυτικά και πειραματικά αποτελέσματα έδειξαν ότι η ανελαστική διαξονική συμπεριφορά είναι σημαντική. Γενικά, για κίνηση εντός του επιπέδου, κάθε σεισμικά μονωμένο εφέδρανο υφίσταται μετακίνηση κατά δύο ορθογώνιες διευθύνσεις και συγχρόνως στροφή στο ίδιο επίπεδο. Η κίνηση αυτή συναντά αντίδραση από δυνάμεις κατά τις δύο διευθύνσεις και από ροπή στο ίδιο επίπεδο. Η αντίσταση αυτή ασκεί μία συνολική αντίδραση στο κέντρο μάζας της βάσης.

Λαμβάνοντας υπόψη την αλληλεπίδραση μόνο μεταξύ των δυνάμεων, κατά τις διευθύνσεις X και Y , η διαξονική συμπεριφορά προσομοιάζεται με τις συζευγμένες διαφορικές εξισώσεις που πρότεινε αρχικά ο Park και στη συνέχεια επέκτειναν οι Kunnath και Reinhorn. Οι εξισώσεις αυτές, που περιγράφουν τις δυνάμεις επαναφοράς, είναι οι εξής:

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x \frac{F_x^y}{U_x^y} & 0 \\ 0 & \alpha_y \frac{F_y^y}{U_y^y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-\alpha_x)F_x^y & 0 \\ 0 & (1-\alpha_y)F_y^y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_x \\ Z_y \end{Bmatrix} \quad (6.3)$$

όπου α_x και α_y είναι ο λόγος της ανελαστικής προς την ελαστική δυσκαμψία κατά τις διευθύνσεις X και Y αντίστοιχα.

Ο πρώτος όρος του αθροίσματος παριστάνει την γραμμική ελαστική συνιστώσα και ο δεύτερος την ελαστοπλαστική συνιστώσα της δύναμης επαναφοράς. Οι αδιάστατες ποσότητες Z_x και Z_y ελέγχονται από τις παρακάτω συζευγμένες διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες περιγράφουν την αλληλεπίδραση μεταξύ των διευθύνσεων X και Y :

$$\begin{Bmatrix} \dot{Z}_x U_x^y \\ \dot{Z}_y U_y^x \end{Bmatrix} = AI \begin{Bmatrix} \dot{U}_x \\ \dot{U}_y \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_x^2 (\gamma \text{Sign}(\dot{U}_x Z_x) + \beta) & Z_x Z_y (\gamma \text{Sign}(\dot{U}_y Z_y) + \beta) \\ Z_x Z_y (\gamma \text{Sign}(\dot{U}_x Z_x) + \beta) & Z_y^2 (\gamma \text{Sign}(\dot{U}_y Z_y) + \beta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_x \\ \dot{U}_y \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

Η συνισταμένη δύναμη αντίστασης αναπτύσσεται υπό γωνία θ ως προς τον X άξονα. Γενικά κατά την κίνηση εντός επιπέδου μιας ορθογωνικής επιφάνειας χωρίς στροφή, σε κάθε χρονική στιγμή, οι συνιστώσες $\dot{U}_x = \frac{dU_x}{dt}$ και $\dot{U}_y = \frac{dU_y}{dt}$ της σχετικής ταχύτητας της επιφάνειας, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό της συνισταμένης στιγμιαίας ταχύτητας $\dot{U} = \frac{dU}{dt}$ και της γωνίας θ , που σχηματίζει αυτή ως προς τον άξονα των X. Έτσι έχουμε τις εξής εκφράσεις:

$$\theta = \tan^{-1}(\dot{U}_y / \dot{U}_x)$$

και
$$\dot{U} = \sqrt{(\dot{U}_x^2 + \dot{U}_y^2)}$$

Οι εξισώσεις που ελέγχουν τα Z_x και Z_y μπορούν να διατυπωθούν ως εξής:

$$(\beta + \gamma) \left\{ Z_x^2 + Z_x Z_y \frac{dU_y}{dU_x} \right\} + \frac{dZ_x}{dU_x} U_x^y = A \quad (6.5)$$

$$(\beta + \gamma) \left\{ Z_y^2 + Z_x Z_y \frac{dU_x}{dU_y} \right\} + \frac{dZ_y}{dU_y} U_y^x = A \quad (6.6)$$

Επιπλέον, λόγω του ότι μετά την φάση διαρροής ισχύει:

$$\frac{dZ_x}{dU_x} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{dZ_y}{dU_y} = 0$$

οι εξισώσεις (6.5) και (6.6) μπορούν να διατυπωθούν και ως εξής:

$$Z_x^2 + \frac{dU_y}{dU_x} Z_x Z_y = \frac{A}{\beta + \gamma} \quad (6.7)$$

$$Z_y^2 + \frac{dU_x}{dU_y} Z_x Z_y = \frac{A}{\beta + \gamma} \quad (6.8)$$

$$\text{όπου } \frac{dU_y}{dU_x} = \tan \theta \text{ και } \frac{dU_x}{dU_y} = \cot \theta.$$

Οπότε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (6.7) και (6.8) έχει ως λύση :

$$Z_x = \cos \theta \quad \text{και} \quad Z_y = \sin \theta$$

$$\text{υπό τον όρο ότι } \frac{A}{(\beta + \gamma)} = 1.$$

Αντικαθιστώντας τα Z_x και Z_y στην αρχική εξίσωση (6.1), παίρνουμε τις ελαστικές και ελαστοπλαστικές συνιστώσες των δυνάμεων υστέρησης κατά τις διευθύνσεις X και Y.

Με τις παραπάνω σχέσεις αναλύεται η αλληλεπίδραση μεταξύ των δυνάμεων κατά X και Y. Η συνεισφορά της στρεπτικής κίνησης σε κάθε εφέδρανο αμελείται.

Αυτό το διαξονικό προσομοίωμα υστέρησης χρησιμοποιείται από το πρόγραμμα **3D-BASIS** για την προσομοίωση των "lead-rubber bearings" (ελαστικά εφέδρανα με πυρήνα μολύβδου), των "high damping bearings" (εφέδρανα υψηλής απόσβεσης), και των "steel dampers" (μεταλλικών αποσβεστήρων).

6.4 Μονοδιάστατα Στοιχεία Τριβής

Στις ασύμμετρες κατασκευές, κάθε εφέδρανο τριβής υφίσταται διαφορετικές μετατοπίσεις κατά τις δύο διευθύνσεις με αποτέλεσμα να απαιτούνται πολύπλοκες συνθήκες περιγραφής της συγκράτησης-ολίσθησης (stick-slip conditions). Η χρήση του προσομοιώματος τριβής κατά Coulomb κάτω από αυτές τις συνθήκες είναι εξαιρετικά πολύπλοκη. Γι' αυτό το λόγο χρησιμοποιείται το τροποποιημένο ιξωπλαστικό προσομοίωμα για την προσομοίωση των στοιχείων τριβής.

Πειράματα έδειξαν ότι ο συντελεστής τριβής εξαρτάται από την ταχύτητα και την πίεση στην διεπιφάνεια των ολισθαινόντων τμημάτων. Ο συντελεστής τριβής που αντιστοιχεί στην ταχύτητα ολίσθησης \dot{U} περιγράφεται κατά προσέγγιση από την σχέση:

$$\mu_s = f_{\max} - \Delta f \exp(-\alpha|\dot{U}|) \quad (6.9)$$

όπου, f_{\max} είναι ο συντελεστής τριβής για πολύ μεγάλη ταχύτητα ολίσθησης, Δf είναι η διαφορά μεταξύ f_{\max} και του συντελεστή τριβής ολίσθησης σε πολύ μικρή ταχύτητα, και α είναι μια σταθερά που ελέγχει την μεταβολή του συντελεστή τριβής από τις πολύ μικρές στις πολύ μεγάλες ταχύτητες ολίσθησης.

Η δύναμη τριβής F_f , στο τροποποιημένο ιξωπλαστικό προσομοίωμα δίνεται από την σχέση:

$$F_f = \mu_s WZ \quad (6.10)$$

όπου, μ_s είναι ο συντελεστής τριβής, ο οποίος μεταβάλλεται με την ταχύτητα, W είναι το βάρος στην διεπιφάνεια τριβής και το Z ορίζεται από την εξίσωση (6.2)

Πρέπει να σημειωθεί ότι κατά την διάρκεια της φάσης ολίσθησης, η μεταβλητή Z παίρνει τις τιμές ± 1 , ενώ κατά την διάρκεια της συγκράτησης η απόλυτη τιμή του Z παραμένει μικρότερη της μονάδας.

Βασικός περιορισμός του ιξωπλαστικού προσομοιώματος, είναι η ανικανότητά του να αναπαράγει πραγματικά απολύτως πλαστική συμπεριφορά. Παρ' όλα αυτά, λόγω του ότι οι διεπιφάνειες από Teflon και χάλυβα υφίστανται πολύ μικρές ελαστικές μετακινήσεις πριν την ολίσθηση, μικρές τιμές μετατόπισης διαρροής, της τάξεως των 0,010 cm, μπορούν λογικά να υποτεθούν και έτσι το ιξωπλαστικό προσομοίωμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τα συστήματα τριβής. Με βάση το προσομοίωμα αυτό, με κατάλληλη εκλογή των παραμέτρων του, αναπαράγονται βρόγχοι υστέρησης οι οποίοι συμφωνούν με πειραματικά αποτελέσματα.

Η τριβή στην διεπιφάνεια παρουσιάζει υψηλότερη τιμή για την χρονική στιγμή πριν την αρχική ολίσθηση (τριβή αποκόλλησης). Η τιμή αυτή δίνεται από την σχέση.

$$\mu_s = b(f_{\max} - D_f) \text{ για } |Z| \leq 0.999 \quad (6.11)$$

Η αρχική ολίσθηση ξεκινά για τιμές του Z : $|Z| > 0.999$. Επιπλέον $b > 1$ και $(f_{\max} - D_f)$ είναι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης σε μηδενικές κυρίως ταχύτητες ολίσθησης. Μετά την έναρξη της ολίσθησης η εξίσωση (6.9) δίνει τον συντελεστή τριβής ολίσθησης.

6.5 Διαξονικά Στοιχεία Τριβής

Η τριβή στην επίπεδη κίνηση, εμφανίζεται σε μη συμμετρικές κατασκευές με σεισμικά μονωμένη βάση και σε συστήματα που διεγείρονται από εδαφική κίνηση πολλών κατευθύνσεων. Στα εφέδρανα από Teflon, η διεπιφάνεια Teflon-χάλυβα υφίσταται μετακίνηση κατά δύο ορθογώνιες διευθύνσεις και στροφή στο επίπεδο της. Η κίνηση αυτή έχει ως επακόλουθο την εμφάνιση δυνάμεων τριβής κατά τις δύο διευθύνσεις καθώς και ροπής.

Οι δυνάμεις τριβής που δημιουργούνται σε κάθε μονωτήρα κατά τις διευθύνσεις X και Y προκαλούν δυνάμεις επαναφοράς δηλ. δύναμη κατά X και Y και στρεπτική ροπή στο κέντρο μάζας της βάσης. Όπως στις σεισμικά μονωμένες κατασκευές με ελαστομεταλλικά εφέδρανα, έτσι και εδώ, η συνεισφορά της στρεπτικής ροπής κάθε μονωτήρα είναι αμελητέα σε σύγκριση με την συνολική στρεπτική ροπή αντίστασης στο κέντρο της μάζας της βάσης και γι' αυτό αμελείται.

Η συνισταμένη δύναμη αντίστασης τριβής σε κάθε επιφάνεια, αντιτίθεται στην σταδιακά μεταβαλλόμενη μετακίνηση που υπολογίζεται σε κάθε χρονική ολοκλήρωση. Κάθε χρονική στιγμή, η συνισταμένη δύναμη τριβής βρίσκεται υπό γωνία θ ως προς τον άξονα των X . Στην γενική επίπεδη κίνηση μιας διεπιφάνειας από Teflon και χάλυβα χωρίς στροφή, οι συνιστώσες της σχετικής ταχύτητας \dot{U}_x και \dot{U}_y μπορούν να χρησιμοποιηθούν κάθε χρονική στιγμή, για τον προσδιορισμό της συνολικής στιγμιαίας ταχύτητας \dot{U} και της γωνίας θ που σχηματίζει αυτή με τον άξονα των X :

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{U}_y}{\dot{U}_x} \right) \text{ και } \dot{U} = \sqrt{(\dot{U}_x^2 + \dot{U}_y^2)}$$

Οι δυνάμεις τριβής F_x και F_y (που ασκούνται στην διεπιφάνεια), δίνονται από τις εξισώσεις:

$$F_x = \mu_s W \cos \theta \quad (6.12)$$

και
$$F_y = \mu_s W \sin \theta \quad (6.13)$$

όπου ο μ_s δίνεται από την σχέση (6.9) και οι παράμετροι f_{\max} , D_f και α εξαρτώνται γενικά από την διεύθυνση της ολίσθησης. Σε μία ισοτροπική επιφάνεια, ο συντελεστής μ_s είναι ανεξάρτητος της γωνίας θ , και η καμπύλη αλληλεπίδρασης των δυνάμεων F_x και F_y έχει κυκλική μορφή. Σε μία ανισοτροπική επιφάνεια η καμπύλη αυτή απέχει αρκετά από την κυκλική μορφή. Η αλληλεπίδραση μεταξύ των δυνάμεων τριβής, κατά τις δύο διευθύνσεις X και Y και της ροπής, έχει μεγάλη σημασία στην προσομοίωση της τριβής στην επίπεδη κίνηση. Όπως απέδειξαν όμως οι Constantinou και Mokha, η ροπή που αναπτύσσεται στις επιφάνειες των στοιχείων με συμπεριφορά τριβής, είναι ανεξάρτητη από τις δυνάμεις τριβής κατά X και Y.

Η προσομοίωση της τριβής, στην επίπεδη κίνηση, στηρίζεται στις συζευγμένες διαφορικές εξισώσεις (6.4), που ισχύουν και για τα στοιχεία υστέρησης. Κατά την ολίσθηση οι μεταβλητές Z_x και Z_y φτάνουν τις μέγιστες τιμές τους, δηλαδή ισχύει:

$$\frac{dZ_x}{dU_x} = \frac{dZ_y}{dU_y} = 0$$

οπότε οι εξισώσεις (6.4) εκφράζονται ως εξής:

$$Z_x^2 + \frac{dU_y}{dU_x} Z_x Z_y = \frac{A}{\beta + \gamma} \quad (6.14)$$

$$Z_y^2 + \frac{dU_x}{dU_y} Z_x Z_y = \frac{A}{\beta + \gamma} \quad (6.15)$$

όπου $\frac{dU_y}{dU_x} = \tan \theta$ και $\frac{dU_x}{dU_y} = \cot \theta$.

Οπότε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (6.14) και (6.15) έχει ως λύση :

$$Z_x = \cos \theta \quad \text{και} \quad Z_y = \sin \theta$$

υπό τον όρο ότι $\frac{A}{(\beta + \gamma)} = 1$.

Οπότε οι δυνάμεις τριβής κατά τις διευθύνσεις X και Y εκφράζονται ως εξής:

$$F_x = \mu_s W Z_x \quad (6.16)$$

$$F_y = \mu_s W Z_y \quad (6.17)$$

οι οποίες είναι ισοδύναμες με τις εξισώσεις (6.12) και (6.13). Το προσομοίωμα αυτό χρησιμοποιείται για την προσομοίωση των στοιχείων τριβής, με τριβή στην επίπεδη κίνηση, στο πρόγραμμα 3D-BASIS.

6.6 Μη-Γραμμική Συμπεριφορά Μονοβάθμιου Ταλαντωτή - Μονωτήρα

Η ελαστική δύναμη επαναφοράς του μονωτήρα καθορίζεται από την σχέση:

$$F = \alpha \frac{F_y}{u_y} + (1 - \alpha) F_y z(t) \quad (6.18)$$

όπου $z(t)$ αδιάστατος συντελεστής συμπεριφοράς του ταλαντωτή ο οποίος ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση:

$$\dot{z}(t) = \frac{1}{u_y} \left\{ A - |z(t)|^n \left(\gamma \operatorname{sign}(\dot{u}(t) z(t)) + \beta \right) \right\} \dot{u}(t) \quad (6.19)$$

Αν θεωρήσουμε ένα μονοβάθμιο ταλαντωτή ενός μονωτήρα με την παραπάνω δύναμη επαναφοράς ο οποίος έχει μάζας m και πρόσθετη ιξώδη απόσβεσης c τότε η εξίσωση δυναμικής ισορροπίας του είναι:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + F = f(t) \quad (6.20)$$

όπου $f(t)$ η εξωτερική δυναμική διέγερση.

Αντικαθιστώντας την δύναμη επαναφοράς από τις αντίστοιχες σχέσεις λαμβάνουμε:

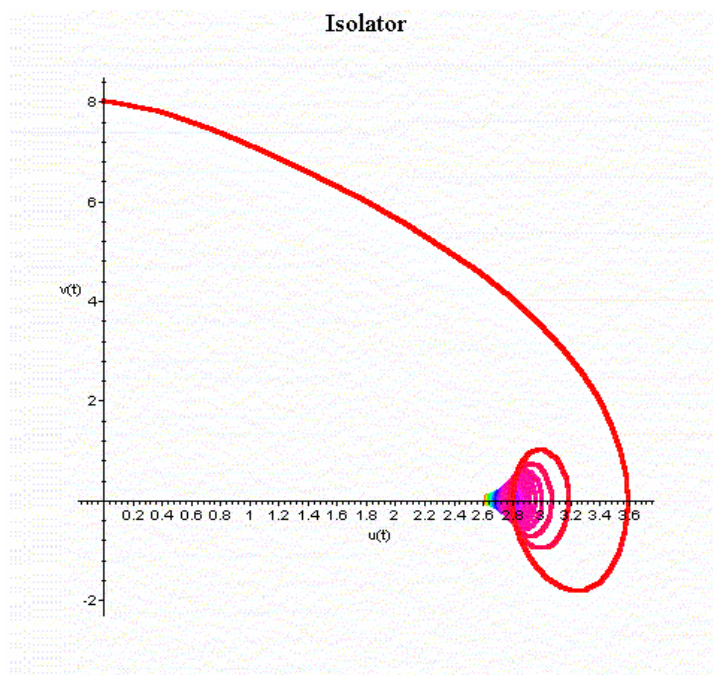
$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + a\frac{F_y}{u_y} + (1-a)F_y z(t) = f(t) \quad (6.21)$$

Το σύστημα των δύο διαφορικών εξισώσεων μία δευτέρας τάξεως και μία πρώτης τάξεως μετασχηματίζεται σε ένα σύστημα τριών διαφορικών εξισώσεων πρώτου βαθμού ακολουθώντας την λεγόμενη διατύπωση στον χώρο κατάστασης (state space) με τη θεώρηση των εξής μεταβλητών:

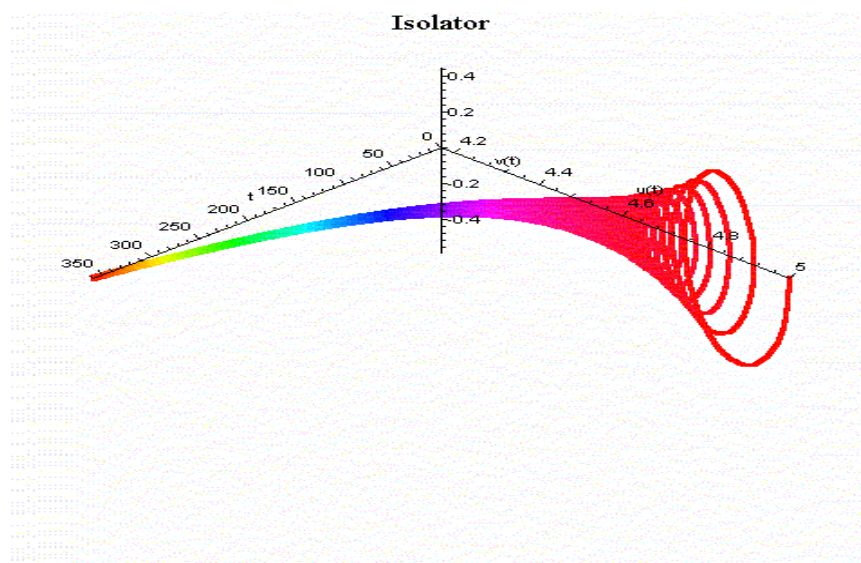
$$x_1(t) = u(t), \quad x_2(t) = \dot{u}(t), \quad x_3(t) = z(t) \quad (6.22)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{c}{m}x_2(t) - a\frac{F_y}{u_y}x_1(t) - (1-a)F_y x_3(t) + f(t) \\ \frac{1}{u_y} \left\{ \left[A - |x_3(t)|^n (\gamma \text{sign}(x_2(t)x_3(t)) + \beta) \right] x_2(t) \right\} \end{Bmatrix} \quad (6.23)$$

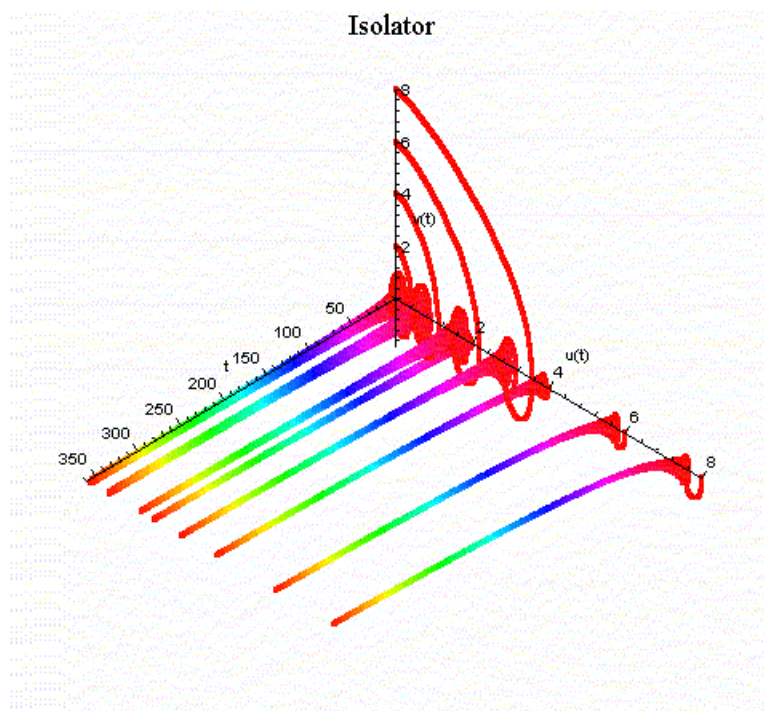
Το παραπάνω σύστημα τριών μη-γραμμικών εξισώσεων επιλύεται αριθμητικά με την μέθοδο Runge Kutta 4^{ης} τάξεως. Για ταλαντωτή με τιμές $a=0.023$, $F_y=2.86$ kN, $u_y=0.111$ cm, $A=1$, $\beta=0.1$, $\gamma=0.9$, $m=286$ kNsec²/m και $c=0$ και για διάφορες αρχικές τιμές μετακινήσεων και ταχυτήτων προκύπτουν οι ακόλουθες λύσεις. Οι λύσεις παρουσιάζονται στο πεδίο των φάσεων (οριζόντιος άξονας η μετατόπιση και κατακόρυφος άξονας η ταχύτητα).



Σχήμα 6.1 Ελεύθερες Ταλαντώσεις στο πεδίο των φάσεων



Σχήμα 6.2 Τρισδιάστατη απεικόνιση της μετατόπισης και της ταχύτητας με τον χρόνο (διάρκεια 360 sec)



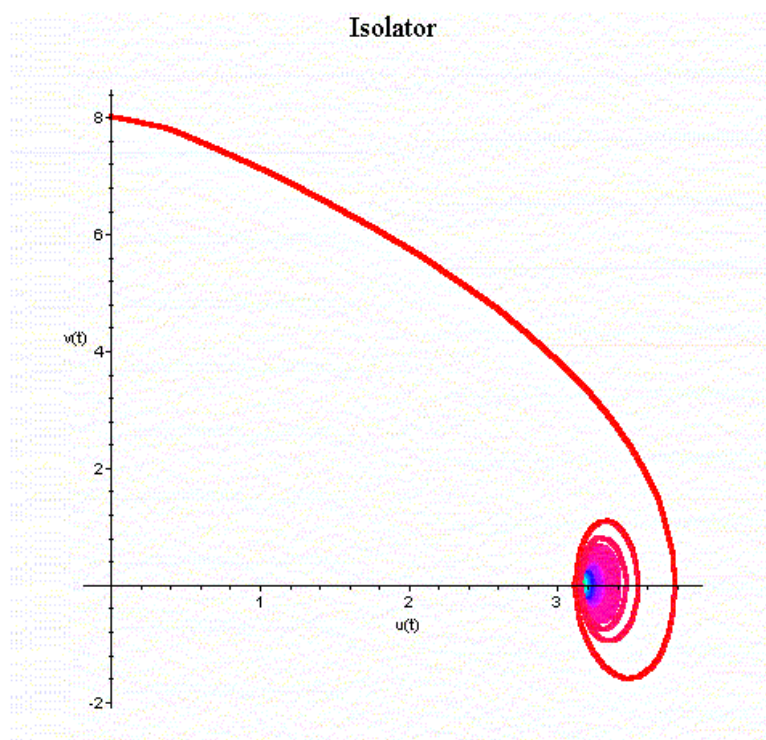
Σχήμα 6.3 Τρισδιάστατη ανάλυση μετατοπίσεων και ταχυτήτων στο χρόνο για διάφορες αρχικές μετατοπίσεις και ταχύτητες

Από το Σχήμα 6.1 προκύπτει ότι για αρχική ταχύτητα 8cm/sec ο ταλαντωτής παρουσιάζει ευσταθή συμπεριφορά δηλαδή μετά από τον παρέλευση κάποιου χρόνου ηρεμεί. Η σταθεροποίηση του ταλαντωτή γίνεται όχι στη μηδενική θέση αλλά σε μετατοπισμένη θέση.

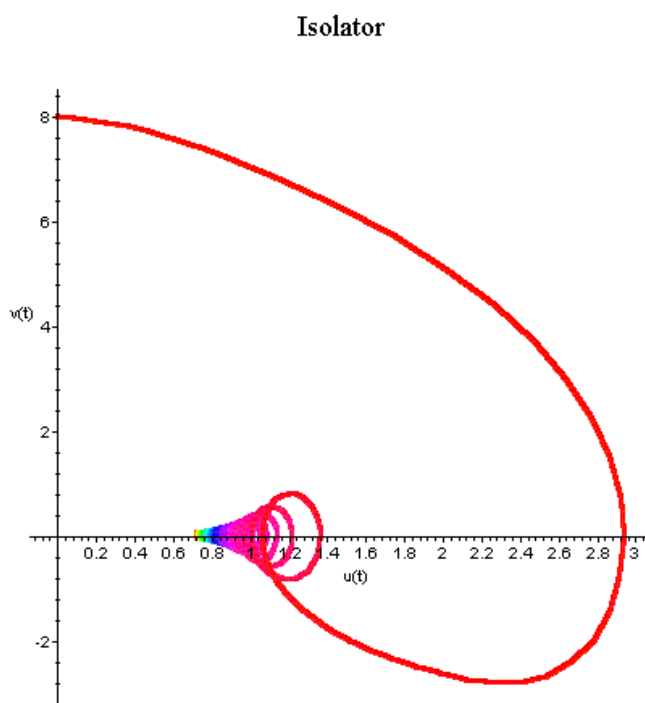
Στο Σχήμα 6.2 παρουσιάζεται η χρονική εξέλιξη των μετατοπίσεων και ταχυτήτων για αρχική μετατόπιση 5cm, όπου και παρατηρείται ασυμπτωτική συμπεριφορά προς την ηρεμία με μηδενικές ταχύτητες και μετατοπίσεις.

Στο Σχήμα 6.3 παρουσιάζονται αντίστοιχα οι μετατοπίσεις και οι ταχύτητες του ταλαντωτή για διάφορε αρχικές τιμές των μετατοπίσεων (2, 4, 6, 8 cm) και μηδενικών ταχυτήτων καθώς και μηδενικών μετατοπίσεων και αρχικών ταχυτήτων (2, 4, 6, 8 cm/sec).

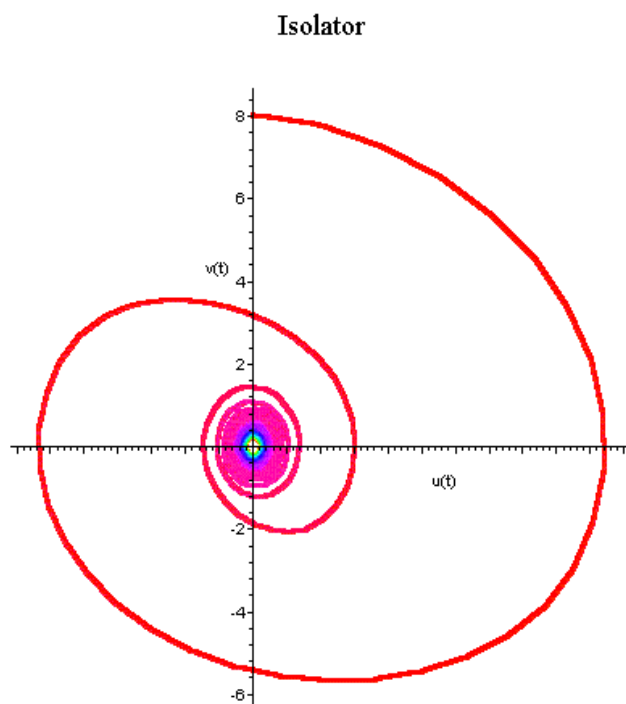
Η παραπάνω συμπεριφορά αντιστοιχεί σε $\alpha=0.023$ που καθορίζει το ποσοστό της ελαστικής γραμμικής συμπεριφοράς. Αυξάνοντας τον συντελεστή α λαμβάνουμε συμπεριφορές που ασυμπτωτικά προσεγγίζουν τον μονοβάθμιο ελαστικό ταλαντωτή. Η συμπεριφορά αυτή φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.



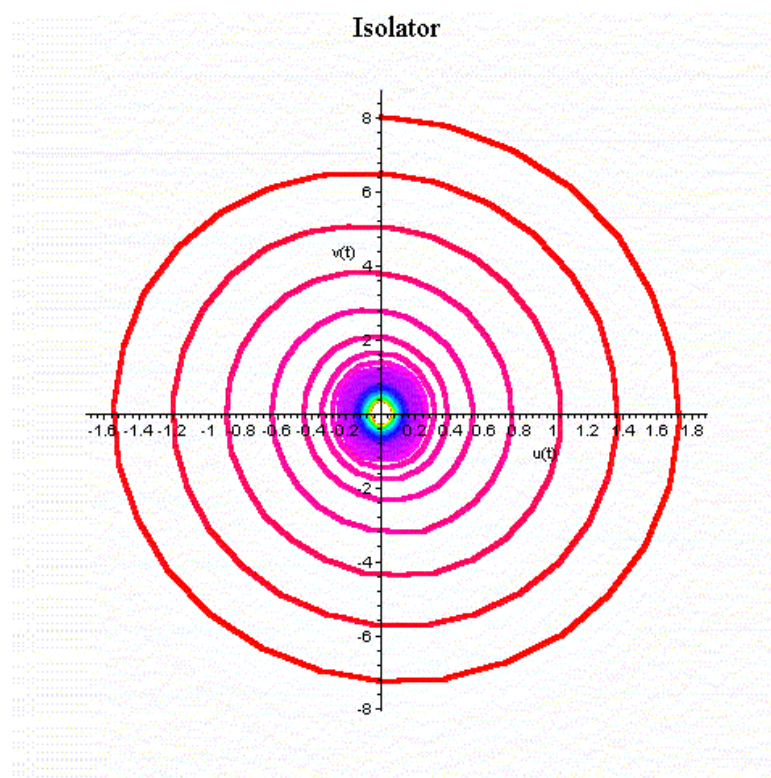
Σχήμα 6.4 Πορτραίτο φάσεων για $\alpha=0.002$



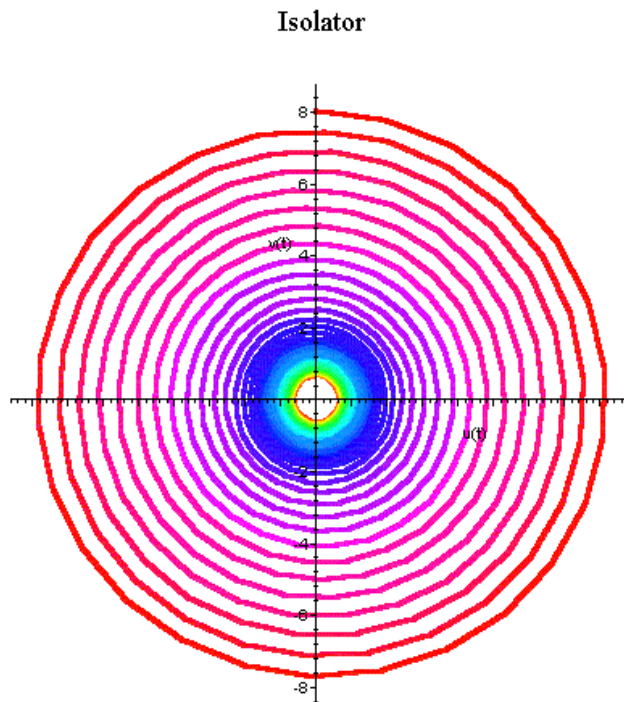
Σχήμα 6.5 Πορτραίτο φάσεων για $\alpha=0.01$



Σχήμα 6.6 Πορτραίτο φάσεων για $\alpha=0.4$

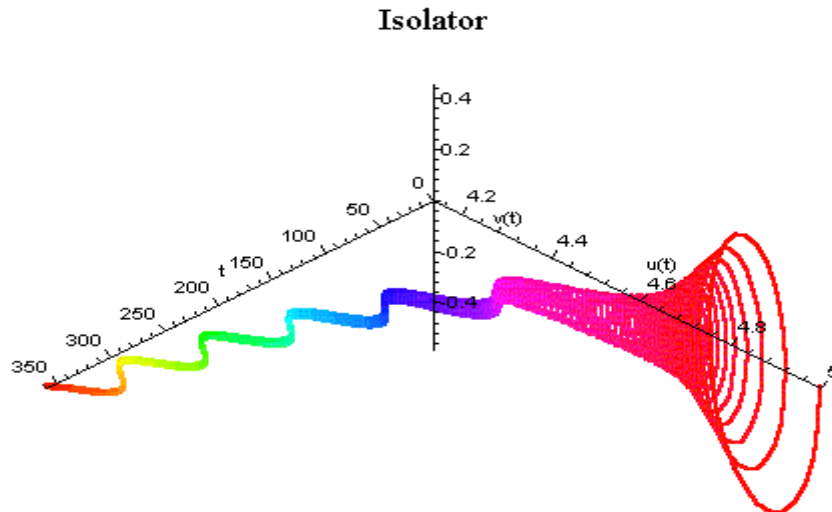


Σχήμα 6.7 Πορτραίτο φάσεων για $\alpha=0.75$



Σχήμα 6.8 Πορτραίτο φάσεων για $\alpha=0.9$

Στο Σχήμα 6.9 παρουσιάζεται η μεταβολή των μετακινήσεων και ταχυτήτων με τον χρόνο για ένα σύστημα μονωτήρα που διεγείρεται με μία ημιτονική διέγερση $\sin(0.1t)$. Παρατηρείται η επιρροή της διέγερσης που επικρατεί της κίνησης μετά την πάροδο κάποιου χρόνου και την σημαντική απόσβεση του πλάτους ταλάντωσης και ταχυτήτων. Η μελέτη της συμπεριφοράς ενός μη γραμμικού ταλαντωτή για διάφορες συχνότητες διέγερσης σε σχέση με τις ιδιοσυχνότητες του ταλαντωτή αποτελεί ένα ειδικό θέμα που δεν αναλύεται στη παρούσα ανάλυση.



Σχήμα 6.9 Μεταβολή μετατοπίσεων και ταχυτήτων με τον χρόνο για ημιτονική διέγερση

6.7 Μη-Γραμμική Συμπεριφορά Διβάθμιου Ταλαντωτή - Μονωτήρα

Η διδιάστατη συμπεριφορά του ταλαντωτή στο επίπεδο με βαθμούς ελευθερίας τις μετατοπίσεις u_x και u_y που συζευγνύονται μέσω των αδιάστατων μεταβλητών z_x, z_y περιγράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_x(t) \\ \ddot{u}_y(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_x(t) \\ \dot{u}_y(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a_x \frac{F_x^y}{u_x^y} & 0 \\ 0 & a_y \frac{F_y^x}{u_y^x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \end{Bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} (1-a_x)F_x^y & 0 \\ 0 & (1-a_y)F_y^x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_x(t) \\ z_y(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_x(t) \\ f_y(t) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6.24)$$

και

$$\begin{Bmatrix} \dot{z}_x(t) u_x^y \\ \dot{z}_y(t) u_x^y \end{Bmatrix} = AR \begin{Bmatrix} \dot{u}_x(t) \\ \dot{u}_y(t) \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} z_x^2(\gamma \sinh(\dot{u}_x(t)z_x(t)) + \beta) & z_x z_y(\gamma \sinh(\dot{u}_y(t)z_y(t)) + \beta) \\ z_x z_y(\gamma \sinh(\dot{u}_x(t)z_x(t)) + \beta) & z_y^2(\gamma \sinh(\dot{u}_y(t)z_y(t)) + \beta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_x(t) \\ \dot{u}_y(t) \end{Bmatrix} \quad (6.25)$$

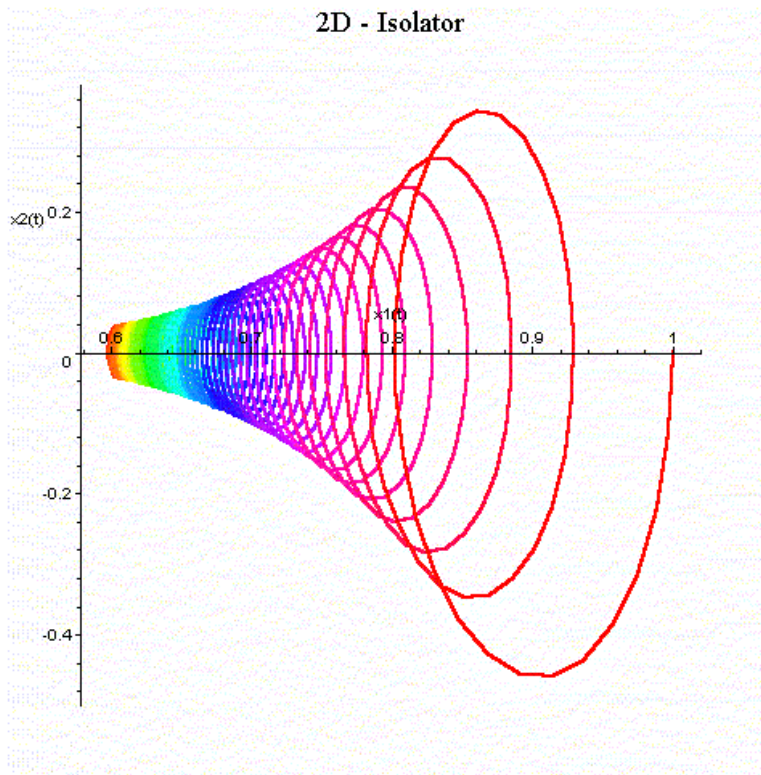
Το παραπάνω σύστημα ανάγεται σε ένα σύστημα έξι πρωτοβαθμίων εξισώσεων ως προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= u_x(t), & x_2(t) &= \dot{u}_x(t), & x_3(t) &= z_x(t) \\ x_4(t) &= u_y(t), & x_5(t) &= \dot{u}_y(t), & x_6(t) &= z_y(t) \end{aligned}$$

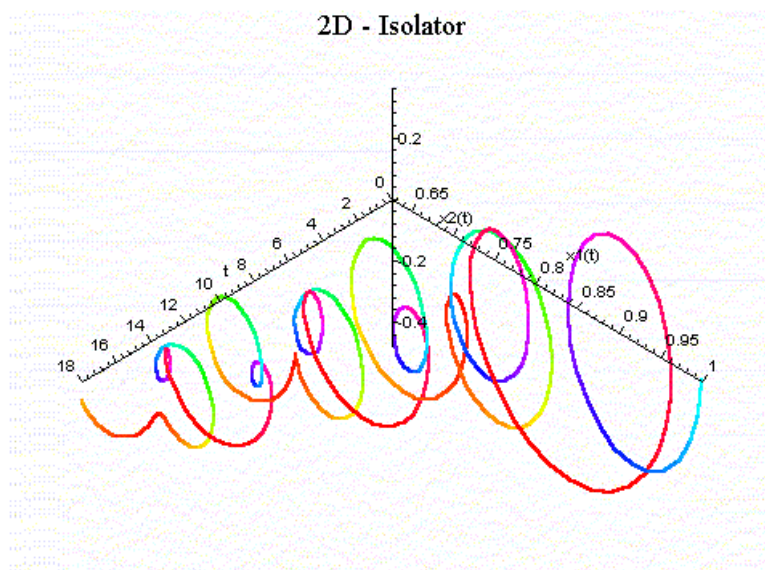
και λαμβάνει την μορφή:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \\ \dot{x}_5(t) \\ \dot{x}_6(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{c_x}{m}x_2(t) - a_x \frac{F_x^y}{u_x^y}x_1(t) - (1-a_x)F_x^y x_3(t) + f_x(t) \\ \frac{1}{u_x^y} \{ \{A - x_3^2(t)(\gamma \text{sign}(x_2(t)x_3(t)) + \beta)\}x_2(t) - x_3(t)x_6(t)(\gamma \text{sign}(x_5(t)x_6(t)) + \beta)x_5(t) \} \\ x_5(t) \\ -\frac{c_x}{m}x_2(t) - a_x \frac{F_x^y}{u_x^y}x_1(t) - (1-a_x)F_x^y x_3(t) + f_x(t) \\ \frac{1}{u_y^y} \{ \{A - x_3(t)x_6(t)(\gamma \text{sign}(x_2(t)x_3(t)) + \beta)\}x_2(t) - x_5^2(t)(\gamma \text{sign}(x_5(t)x_6(t)) + \beta)x_5(t) \} \end{Bmatrix} \quad (6.26)$$

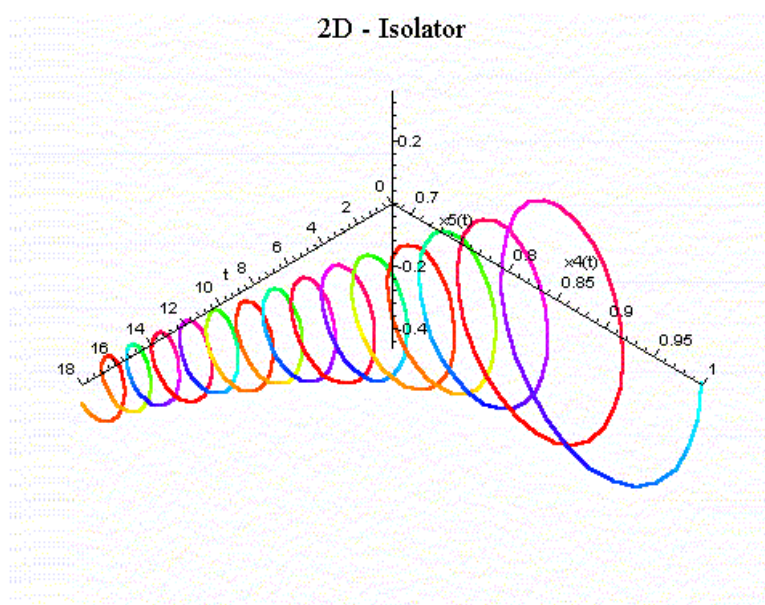
Για διάφορες αρχικές τιμές μετακινήσεων και ταχυτήτων προκύπτουν οι ακόλουθες λύσεις. Οι λύσεις παρουσιάζονται στο πεδίο των φάσεων (οριζόντιος άξονας η μετατόπιση και κατακόρυφος άξονας η ταχύτητα).



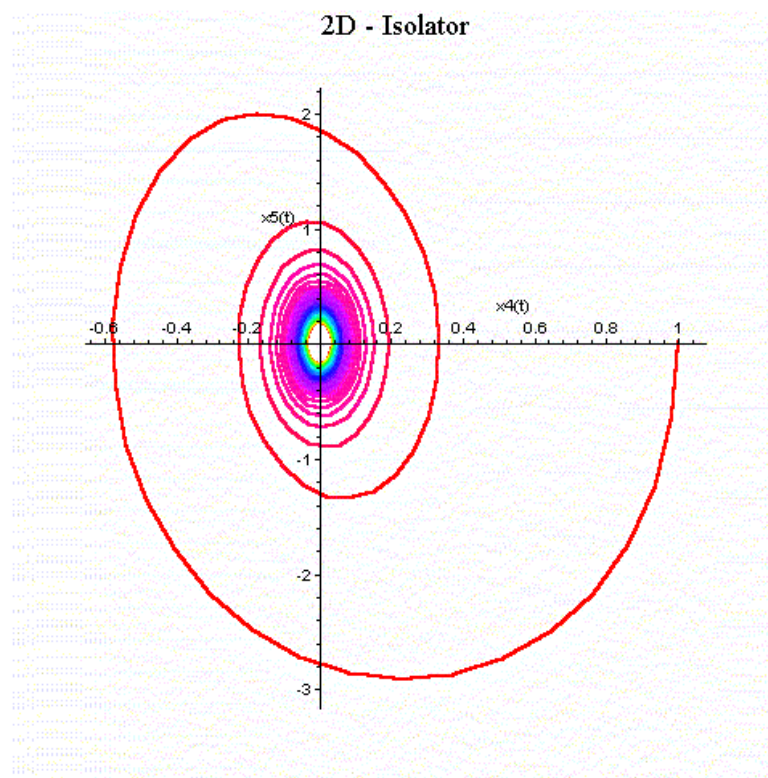
Σχήμα 6.10 Πορτραίτο φάσεων διβάθμιου συστήματος για $\alpha=0.9$ διεύθυνση x-x



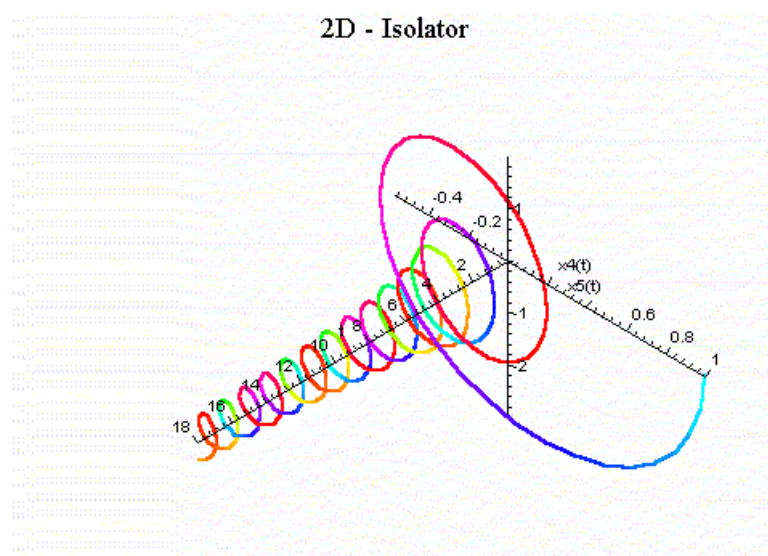
Σχήμα 6.11 Χρονική μεταβολή μετατοπίσεων και ταχυτήτων κατά x για εξαναγκασμένη διέγερση $\sin(2t)$.



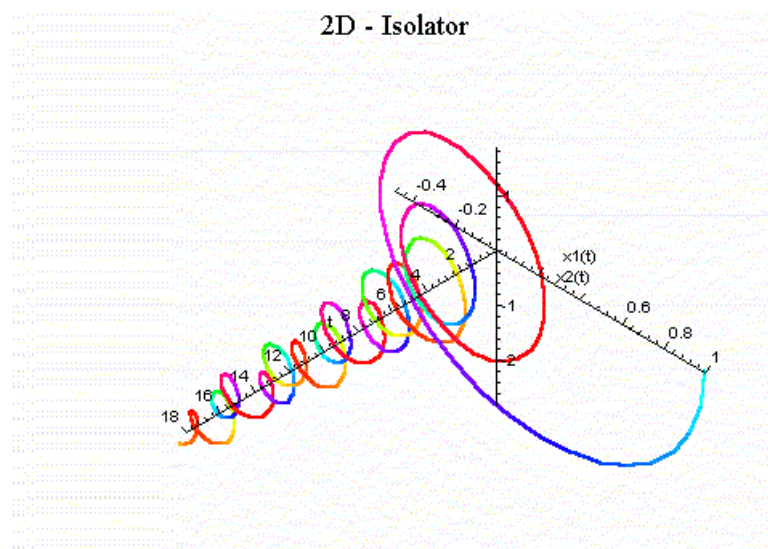
Σχήμα 6.12 Σχήμα Χρονική μεταβολή μετατοπίσεων και ταχυτήτων κατά x για ελεύθερη ταλάντωση



Σχήμα 6.13 Πορτραίτο φάσεων κατά y για $\alpha=0.9$



Σχήμα 6.14 Χρονική μεταβολή μετατοπίσεων και ταχυτήτων κατά y – ελεύθερη ταλάντωση



Σχήμα 6.15 Χρονική μεταβολή μετατοπίσεων και ταχυτήτων κατά y – εξαναγκασμένη ταλάντωση $\sin(2t)$