

**Ο.Α.Σ.Π.**  
Οργανισμός Αντισεισμικού Σχεδιασμού και Προστασίας

100.000 / 100  
1000,00

Ερευνητικό Πρόγραμμα

**ΠΥΡΗΝΕΣ ΑΝΟΙΚΤΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ  
ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ VLASOV**

(ΤΕΛΙΚΗ ΕΚΘΕΣΗ)

Επιστημονικός Υπεύθυνος

**Β. Κουμούσης**  
Αν. Καθηγητής ΕΜΠ

Σεπτέμβριος 1998

## Πυρήνες Ανοικτής Διατομής με βάση τη Θεωρία Vlasov

### Σύνοψη

Τα στοιχεία πυρήνων (Thin Walled Beams), η διατομή των οποίων συντίθεται από ένα σύνολο λεπτότοιχων διατομών συμπεριφέρεται διαφορετικά από τα συνήθη ραβδωτά πρισματικά στοιχεία δοκού συμπαγούς διατομής, έναντι εγκάρσιας και διαμήκους φόρτισης.

Βασικό χαρακτηριστικό της συμπεριφοράς αυτής είναι η μη διατήρηση της επιπεδότητας των διατομών των πυρήνων στην παραμορφωμένη κατάσταση και η εμφάνιση στρέβλωσης (Warping) η οποία εκδηλώνεται εντός της κυλινδρικής επιφάνειας της διατομής και της γενέτειρας. Αποτέλεσμα της στρέβλωσης είναι η ανάπτυξη αξονικών συμπληρωματικών τάσεων (Complementary Longitudinal Stresses) στη διατομή του πυρήνα.

Με βάση την θεώρηση αυτή αναπτύσσεται ένα επιπλέον εντατικό μέγεθος στη διατομή η λεγόμενη διρροπή (Bimoment)  $B$  ( $N.m^2$ ).

Για τις ανάγκες ελέγχου της συμπεριφοράς των κτιρίων, τα οποία φέρουν στο δομικό τους σύστημα ένα ή περισσότερους πυρήνες, προσομοιώθηκαν και αναλύθηκαν συνολικά τέσσερα εξαόροφα κτίρια, με ύψος ορόφου 3m και δύο διαφορετικούς τύπους κάτοψης.

Ο πρώτος τύπος αναλύθηκε αφενός με το πρόγραμμα που αναπτύχθηκε για την προσομοίωση των πυρήνων και αναφέρεται με το όνομα ACT, και αφετέρου με δύο γνωστά προγράμματα, ένα πρόγραμμα στατικής ανάλυσης ραβδωτών φορέων (πρόγραμμα SPACE) και το δεύτερο ένα πρόγραμμα ανάλυσης με πεπερασμένα στοιχεία (πρόγραμμα SOFiSTiK).

Κατά την προσομοίωση του κτιρίου με πεπερασμένα στοιχεία χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία «κελύφους» για τα τοιχώματα και τον πυρήνα (που επιτρέπουν μεμβρανική και καμπτική ένταση) και ραβδωτά στοιχεία για τα υποστυλώματα και τα δοκάρια. Επιβλήθηκε επίσης διαφραγματική λειτουργία στις στάθμες των ορόφων.

Το κτίριο αναλύθηκε με βάση τις διατάξεις του Ν.Ε.Α.Κ τα δε κτίρια έχουν επιλεγεί κατά τρόπο που αναδεικνύουν την καθοριστική συμβολή του πυρήνα ώστε να προσφέρονται για συγκρίσεις.

Η προσομοίωση των ακαμψιών των στοιχείων γίνεται σύμφωνα με τις

απαιτήσεις του Ν.Ε.Α.Κ. με την θεώρηση μειωμένων τιμών, (0.5 για δοκούς, 0.80 για τα τοιχώματα και 0.10 για τις στρεπτικές ακαμψίες. Οι μειώσεις αυτές μεταβάλλουν τις συντεταγμένες του κέντρου διατομής του πυρήνα και τα χαρακτηριστικά στρέβλωσης για τα οποία δεν υπάρχει η δυνατότητα άμεσης σύγκρισης με τα άλλα προγράμματα καθόσον αυτά δεν θεωρούν τους πυρήνες ως στοιχεία ανοικτής διατομής.

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται με τη μορφή διαγραμμάτων όπου φαίνονται οι διαφορές που προέκυψαν για τις μετακινήσεις των ορόφων με βάση τα τρία αυτά προγράμματα. Αναλύθηκαν επίσης δύο ακόμη εξαόροφα κτίρια τα οποία είναι παραλλαγές του αρχικού τύπου με έκκεντρες θέσεις του πυρήνα.

Σε πίνακες και διαγράμματα παρουσιάζονται οι μετακινήσεις των διαφραγμάτων για το σεισμό κατά x και y με βάση τα διάφορα προγράμματα για τους διάφορους τύπους κτιρίων.

Στην ανάλυση αυτή δεν έχουν συμπεριληφθεί θεωρήσεις διατμητικής υστέρησης και ειδικότερα θέματα που αφορούν την ακαμψία μελών οπλισμένου σκυροδέματος και η θεώρηση παραμένει στα πλαίσια της ελαστικής γραμμικής ανάλυσης. Οι αποκλίσεις που παρουσιάζονται δείχνουν τις σχετικές ακαμψίες των προσομοιωμάτων που αποδίδονται στην διαφορετική προσομοίωση των πυρήνων.

Σε ξεχωριστό πίνακα παρουσιάζονται οι αποκλίσεις στα εντατικά μεγέθη των δοκών που συντρέχουν στον πυρήνα. Λόγω των κατακόρυφων μετακινήσεων των ανοικτών άκρων του πυρήνα τα εντατικά μεγέθη αποκλίνουν σημαντικά και δείχνουν τη σημασία της ακριβέστερης προσομοίωσης των πυρήνων.

Οι αποκλίσεις δεν οδηγούν σε συστηματικές διαπιστώσεις καθόσον επηρεάζονται καθοριστικά από το όλο σύμπλεγμα των στοιχείων που απαρτίζουν το συγκεκριμένο κτίριο.

Η προσομοίωση των πυρήνων με επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία έχει θεωρητικά την δυνατότητα να αναδείξει την συμπεριφορά της ανοικτής διατομής καθόσον επιδέχεται μεμβρανικές παραμορφώσεις. Στη περίπτωση αυτή οι μεμβρανικές παραμορφώσεις είναι αυτές που προκύπτουν από την θεωρία της ελαστικότητας χωρίς τον κινηματικό περιορισμό που επιβάλλει η θεωρία ανοικτών διατομών δηλ. ότι η αξονική μετακίνηση είναι ανάλογη της τομεακής ιδιότητας στη συγκεκριμένη θέση. Με την έννοια αυτή η λύση αυτή μπορεί να θεωρηθεί στα πλαίσια της θεωρίας ελαστικότητας ως βάση σύγκρισης. Από τις αναλύσεις προκύπτει ότι η θεωρία των πυρήνων ανοικτής διατομής προσεγγίζει με μεγάλη ακρίβεια τις ελαστικές αναλύσεις.

Σημαντικό θέμα που απομένει να συνεκτιμηθεί είναι η απομείωση των πραγματικών μεγεθών της στρέβλωσης ανάλογα με το υλικό ώστε να προσομοιώνεται ρεαλιστικότερα η στατική και δυναμική συμπεριφορά των πυρήνων ανοικτής διατομής σε κτιριακά έργα.

## **Thin Walled Beams analysis using Vlasov theory**

Thin Walled Beams (TWB) composed by a number of thin cross sections behave a differently as compared to the prismatic beams under longitudinal and transverse loads.

The basic assumption that controls this behavior is that plain sections before deformation do not remain plain after deformation. This results to the warping of the cross sections of TWB and produces additional longitudinal stresses.

Due to this an additional internal force is produced. This is called Bimoment (N.m<sup>2</sup>).

In order to test the behavior of buildings containing in their structural system TWB members, four buildings having six stories with 3.0m height each have been analyzed.

The static analysis programs used are the program developed in this work for the TWB members called ACT, the static analysis program called SPACE, and the finite element analysis program called SOFiSTiK.

In the finite elements analysis shell elements are used to model TWB and beam elements to model the columns and the beams of the building. Additionally diaphragmatic action is assumed for all horizontal and vertical structural members of the buildings at the storey levels.

The loads applied are based on the New Greek Aseismic Code, while the types of the buildings are chosen in a way to reveal the TWB behaviour to the building.

The stiffness characteristics are evaluated according to New Greek Aseismic Code using decreased values by 0.5 for the bending stiffness of the Beams and 0.80 for the bending stiffness of the Shear Walls and 0.10 for the torsional stiffness. These decreased values modify the coordinates of the Shear Center of the TWB as well as the warping characteristics and thus, no direct comparison can be made between the results obtained by ACT and the other two analysis programs which do not model TWB on the basis of the Vlasov theory. The results for the storey displacements are presented in diagrams were the differences between the three analysis programs are displayed.

Two other types of buildings are also analyzed. These types are variations of the basic type. The above formulation remains in the elastic range. The differences shown result from the different formulation of TWB between the three analysis programs used.

The differences in the internal forces of the beams connected to the TWB are also shown in diagrams. These differences result from the additional vertical displacements produced at the edges of the TWB and emphasize the need for a more detailed modeling

of these members.

These deviations do not suggest systematic conclusions because they are strongly affected by the overall topology of the building.

Modeling of TWB by shell finite elements theoretically is capable of displaying the behaviour of open core sections because they accommodate membrane deformations. In this case membrane deformations are based on theory of elasticity and thus, do not obey the kinematic constraint that Vlasov theory is importing i.e. the additional axial deformation is proportional to the sectorial property at the specific position. Therefore, this analysis can be considered as the basis of comparison.

From the comparable study performed in this work it turns out that Vlasov theory is very close to the results of theory of elasticity.

What remains is to estimate the reduction lag of the actual warping due to the behavior of the material in order to estimate accurately the actual static and dynamic behaviour of open sections core elements in buildings.

## ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Με βάση τη Θεωρία Vlasov αναπτύχθηκε κατάλληλο μητρώο ακαμψίας για στοιχεία πυρήνων ανοικτής διατομής διαστάσεων  $14 \times 14$ , καθώς και οι αντίστοιχες δράσεις παγίωσης για συνήθεις φορτίσεις. Τα μητρώα ακαμψίας των στοιχείων αυτών τροποποιούνται κατάλληλα για να μεταφερθούν στην συγκεκριμένη θέση σε κάτοψη

Η θεώρηση του βαθμού ελευθερίας της συστροφής και του αντίστοιχου εντατικού μεγέθους της διρροπής δημιουργεί προβλήματα στο σχεδιασμό ιδιαίτερα ακολουθώντας κανονισμούς συνολικής αντοχής καθόσον δεν ορίζονται συντελεστές φορτίου για τη διρροπή. Αμελώντας την επιρροή της συστροφής και διρροπής ορίζεται ένα μητρώο  $12 \times 12$  που ελέγχει την συμπεριφορά του πυρήνα με ικανοποιητική προσέγγιση για συνήθεις περιπτώσεις κτιριακών έργων, με το πλεονέκτημα χειρισμού του πυρήνα ως τροποποιημένου στύλου στο χώρο.

Προτείνεται έτσι αφενός η αξιοποίηση του προτεινόμενου στοιχείου με την ακριβή και προσεγγιστική του θεώρηση σε υφιστάμενα και νέα προγράμματα ανάλυσης πολυρόφων κτιρίων και αφετέρου η ενθάρυνση σύνταξης ολοκληρωμένων προγραμμάτων με ή χωρίς τη θεώρηση διαφραγματικής λειτουργίας που θα ενσωματώνουν και τα στοιχεία αυτά.

I. Εισαγωγή	1
II. Βασικές παραδοχές - Προσομοίωμα ανάλυσης	2
II.2. Ορισμοί	2
II.4. Στρεπτοκαμπτική καταπόνηση πυρήνα. Στρέβλωση - Διρροπή.	3
II.4.1. Εγκάρσια φόρτιση πυρήνα	3
II.4.2. Διαμήκης φόρτιση πυρήνα	5
II.5. Σύνοψη	7
III. Μετατοπίσεις - Παραμορφώσεις - Τομεακές ιδιότητες	8
III.1. Σύστημα τεταγμένων	8
III.2. Μετατοπίσεις τυχαίου σημείου διατομής πυρήνα	8
III.3. Εύρεση των φυσικών μετατοπίσεων τυχαίου σημείου της μέσης επιφάνειας	10
III.4. Τομεακές ιδιότητες	13
III.5. Παρατηρήσεις επί της σχέσης εύρεσης της $u(z,s)$	15
III.6. Διαμήκης παραμόρφωση $\epsilon$	15
III.7. Συμπεράσματα	16
IV. Εκφραση των $\epsilon(z,s)$ και $u(z,s)$ συναρτήσει των τομεακών ιδιοτήτων	18
IV.1. Εισαγωγή	18
IV.2. Υπολογισμός των $\epsilon(z,s)$ και $u(z,s)$ συναρτήσει του $D_S$	18
IV.3. Σύνοψη	19
V. Σχέση τάσεων παραμορφώσεων	20
V.1. Εισαγωγή	20
V.2. Κατανομή των τάσεων που εμφανίζονται σε διατομή πυρήνα	20
V.3. Εύρεση των $\sigma(z,s)$	21
V.4. Εύρεση της στρεπτικής ροπής $T_1(z)$ .	23
V.5. Εύρεση των διατμητικών τάσεων $\tau(z,s)$	23
V.6. Σύνοψη	25
VI. Διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας στοιχείου πυρήνα σε τυχαίο σύστημα συντεταγμένων	26
VI.1. Εισαγωγή	26
VI.2. Εξαγωγή - διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας	26
VII Διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας στοιχείου πυρήνα σε κύριο σύστημα αξόνων	30
VII.1. Εισαγωγή	30
VII.2. Διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας	30
VII.3. Υπολογισμός των κύριων ιδιοτήτων της διατομής	31
VIII Εντατικά μεγέθη επί της διατομής πυρήνα	33

---



VIII.1. Εισαγωγή . . . . .	33
VIII.2. Αξονικές τάσεις $\sigma(z,s)$ . . . . .	33
VIII.3. Εφαπτομενικές τάσεις $\tau(z,s)$ . . . . .	34
VIII.4. Στρέψη . . . . .	36
VIII.5. Σύνοψη παραγράφων VI - VIII . . . . .	36
IX. Το κέντρο διάτμησης . . . . .	38
IX.1. Γενική περιγραφή ιδιότητες . . . . .	38
Πρόταση . . . . .	38
X. Μηχανικά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά πυρήνων ανοικτής διατομής .	40
X.1. Τοπικό μητρώο ακαμψίας πυρήνα ανοικτής διατομής. . . . .	41
X.2 Καθολικό μητρώο ακαμψίας πυρήνα . . . . .	47
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ . . . . .	
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ . . . . .	

---

# ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΥΡΗΝΩΝ ΚΑΤΑ VLASOV

## I. Εισαγωγή

Τα στοιχεία τα οποία αποτελούν μία κατασκευή μπορούν να χωριστούν σε τέσσερεις κατηγορίες:

α) Τρισδιάστατα στοιχεία.

β) Πλάκες - κελύφη.

γ) Δοκοί.

δ) Δοκοί η διατομή των οποίων αποτελείται από ένα σύνολο λεπτότοιχων διατομών (Thin Walled Beams). Οι δοκοί αυτές θα αναφέρονται στο εξής ως πυρήνες.

Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν τα στοιχεία με διαστάσεις συγκρίσιμες μεταξύ τους. Στην δεύτερη κατηγορία ανήκουν τα στοιχεία η μία διάσταση των οποίων (πάχος) είναι πολύ μικρή σε σύγκριση με τις άλλες δύο. Στην τρίτη κατηγορία ανήκουν οι δοκοί - τα στοιχεία των οποίων οι δύο διαστάσεις είναι πολύ μικρές σε σχέση με την τρίτη. Στην τέταρτη κατηγορία τέλος, ανήκουν στοιχεία τα οποία έχουν και τις τρεις διαστάσεις τους διαφορετικής τάξης μεγέθους: το πάχος της διατομής τους είναι μικρό σε σχέση με τις υπόλοιπες διαστάσεις της διατομής και με την σειρά τους αυτές είναι μικρές συγκρινόμενες με το μήκος του στοιχείου.

Η αντιμετώπιση της τέταρτης αυτής κατηγορίας απαιτεί μία εξειδικευμένη ανάλυση η οποία βασίζεται στο γεγονός ότι στον πυρήνα εμφανίζονται διαμήκεις παραμορφώσεις λόγω στρέψης. Οι διαμήκεις αυτές παραμορφώσεις προκαλούν διαμήκεις τάσεις οι οποίες ονομάζονται *συμπληρωματικές αξονικές τάσεις* (Complementary Longitudinal Normal Stresses).

Αποτέλεσμα της ανωτέρω συμπεριφοράς των στοιχείων της τέταρτης κατηγορίας είναι η στρέβλωση της διατομής τους, η οποία δεν παραμένει επίπεδη στην παραμορφωμένη κατάσταση.

Οι συμπληρωματικές αξονικές τάσεις (Complementary Longitudinal Normal Stresses) δεν μπορούν να αμεληθούν στους πυρήνες με ανοικτή (εύκαμπτη - άκαμπτη) διατομή και στους πυρήνες με κλειστή εύκαμπτη διατομή, ενώ αντίθετα στους πυρήνες με κλειστή άκαμπτη διατομή οι ανωτέρω τάσεις έχουν έναν τοπικό χαρακτήρα και μπορούν να αμεληθούν.

Από τα ανωτέρω προκύπτει ότι η κλασσική θεωρία της δοκού δεν μπορεί να προσφέρει ακριβή αποτελέσματα στους πυρήνες με ανοικτή διατομή και στους πυρήνες με κλειστή εύκαμπτη διατομή. Στην θέση της κλασσικής θεωρίας

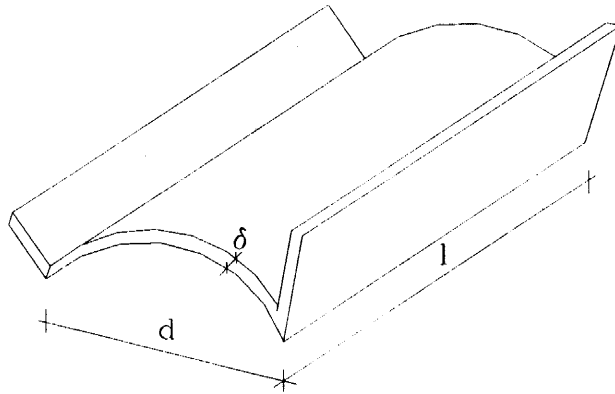
δοκού ο Vlasov διετύπωσε την θεωρία των πυρήνων η οποία λαμβάνει υπόψη την ιδιάζουσα παραμορφωσιακή συμπεριφορά των πυρήνων.

## II. Βασικές παραδοχές - Προσομοίωμα ανάλυσης

Στην παράγραφο αυτή θα γίνει μία συνοπτική παρουσίαση των βασικών παραδοχών και του μοντέλου ανάλυσης των πυρήνων, με ανοικτή ή κλειστή - εύκαμπτη ή άκαμπτη διατομή.

### II.1. Συσχετισμός διαστάσεων πυρήνα.

Εστω  $\delta$  το πάχος της διατομής ενός στοιχείου,  $d$  το πλάτος ή το ύψος της διατομής και  $l$  το μήκος του στοιχείου. Όταν  $\frac{\delta}{d} \leq 0,1$ ,  $\frac{d}{l} \leq 0,1$ , το στοιχείο μπορεί να θεωρηθεί ως πυρήνας.



Σχήμα 1. Τυπικός πυρήνας

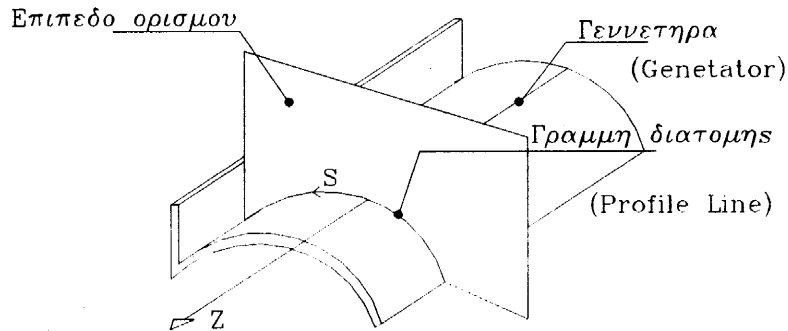
### II.2. Ορισμοί

- *Μέση επιφάνεια* (Middle Surface) πυρήνα. Είναι η επιφάνεια που περνά από το μέσο των λεπτότοιχων διατομών που αποτελούν τον πυρήνα.
- *Γεννήτρες* (Generators) της μέσης επιφάνειας. Είναι οι γραμμές που κείτονται στην μέση επιφάνεια και είναι παράλληλες με τον διαμήκη άξονα του πυρήνα.
- *Γραμμή της διατομής* (Profile Line). Είναι η γραμμή που σχηματίζεται από την τομή της μέσης επιφάνειας και ενός επιπέδου κάθετου στις γεννήτρες.
- *Επίπεδο ορισμού* (Terminal Plane). Είναι κάθε επίπεδο το οποίο είναι κάθετο στις γεννήτρες και λαμβάνεται ως αφετηρία μέτρησης του διαμήκους άξονα του πυρήνα.

Κάθε γεννήτρηρα και κάθε γραμμή διατομής μπορούν να ληφθούν ως άξονες ορισμού συντεταγμένων. Κατά μήκος μίας τυχαίας γεννήτρηρας μπορεί να

θεωρηθεί ότι διέρχεται ο άξονας  $Z$  (διαμήκης άξονας του πυρήνα) και κατά μήκος μίας τυχαίας γραμμής διατομής μπορεί να θεωρηθεί ότι διέρχεται ο άξονας  $S$ . Το μηδέν για την συντεταγμένη  $S$  μπορεί να θεωρηθεί ότι βρίσκεται επάνω σε οποιαδήποτε γεννήτρια. (Συνήθως επιλέγεται ως  $s = 0$  κάποιο σημείο συμμετρίας της διατομής του πυρήνα αν υπάρχει). Το μηδέν για την συντεταγμένη  $Z$  μπορεί να θεωρηθεί σε οποιοδήποτε επίπεδο ορισμού.

Τα ανωτέρω εικονίζονται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 2 . Τυπικός πυρήνας και στοιχεία αυτού

### II.3. Οι δύο βασικές γεωμετρικές παραδοχές της θεωρίας των πυρήνων

Ο Vlasov στήριξε την θεωρία του για τους πυρήνες στις ακόλουθες δύο παραδοχές:

α). Κάθε ανοικτή διατομή πυρήνα κατά την παραμόρφωση του, παραμένει απαραμόρφωτη, δηλ τομές κάθετες σε γεννήτρια πριν και μετά την παραμόρφωση παραμένουν αναλοιώτες.

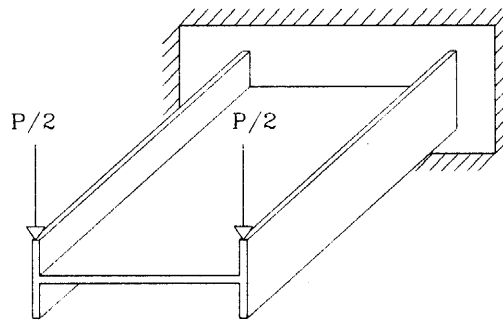
β). Η διατμητική παραμόρφωση της μέσης επιφάνειας (η μεταβολή της γωνίας μεταξύ των αξόνων  $Z$  και  $S$ ) θεωρείται αμελητέα.

### II.4. Στρεπτοκαμπτική καταπόνηση πυρήνα. Στρέβλωση - Διρροπή.

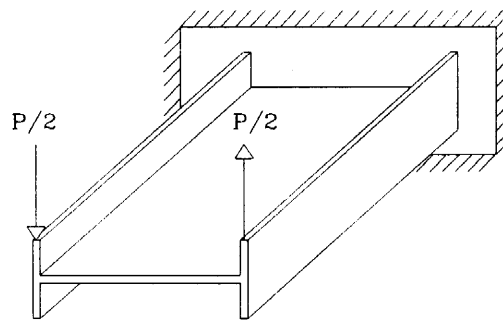
Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζεται η συμπεριφορά των πυρήνων σε εγκάρσια φόρτιση στην μέση επιφάνεια (Middle Surface) και σε διαμήκη φόρτιση.

#### II.4.1. Εγκάρσια φόρτιση πυρήνα

Εστω ο πυρήνας του σχήματος 3 ο οποίος υπόκειται σε δύο φορτίσεις:



(α)



(β)

**Σχήμα 3. Φόρτιση πυρήνα**

Η φόρτιση του σχήματος (3α) προκαλεί καμπτική καταπόνηση, ενώ η φόρτιση του σχήματος (3β) προκαλεί στρεπτοκαμπτική καταπόνηση.

Η φόρτιση του σχήματος (3α) προκαλεί εντατική κατάσταση στον πυρήνα η οποία μπορεί να αναλυθεί με την κλασική θεωρία της δοκού, ως αποτέλεσμα του γεγονότος ότι τυχαία διατομή του πυρήνα παραμένει επίπεδη στην παραμορφωμένη κατάσταση. Σ' αυτήν την φόρτιση και οι δύο φλάντζες του πυρήνα κάμπτονται κατά την ίδια διεύθυνση, μέσα στο επίπεδο τους

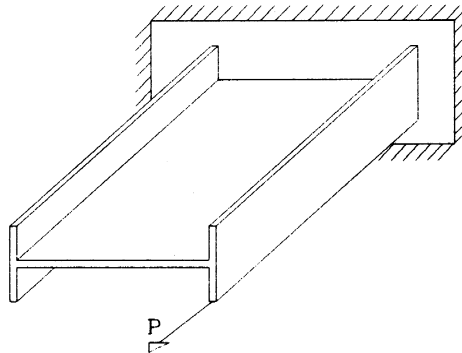
Αντίθετα στην φόρτιση του σχήματος (4β), ο πυρήνας δεν υπόκειται μόνο σε στρεπτική καταπόνηση (λόγω του ζεύγους  $P/2$ ) αλλά και σε καμπτική, καθώς οι δύο φλάντζες κάμπτονται στο επίπεδο τους κατά αντίθετη διεύθυνση, με αποτέλεσμα οι άνω ίνες της αριστερής φλάντζας να θλίβονται και οι αντίστοιχες ίνες της δεξιάς να εφελκύνονται (τα αντίθετα ισχύουν για τις κάτω ίνες).

Ως αποτέλεσμα της αντίθετης παραμόρφωσης στην οποία υπόκεινται οι δύο φλάντζες, οι διατομές του πυρήνα δεν παραμένουν επίπεδες. Η απόκλιση από την επιπεδότητα των διατομών ονομάζεται *στρέβλωση* (Warping).

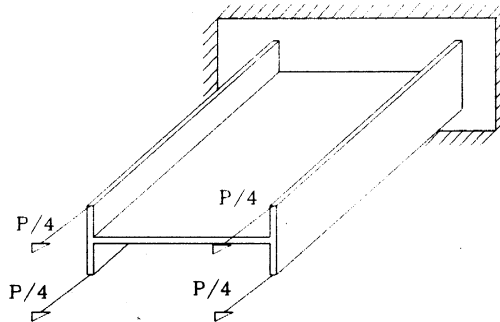
Επιπρόσθετα, λόγω της κάμψης παρουσιάζονται διαμήκειες τάσεις στον πυρήνα, εκτός των διατμητικών τάσεων λόγω στρέψης. Οι διαμήκειες αυτές τάσεις, εξεταζόμενες σε τυχαία διατομή του πυρήνα, παράγουν μία γενικευμένη δύναμη η οποία ονομάζεται *διαμήκης διρροπή* (Longitudinal Bimoment). Στο σχήμα (4β) η διρροπή αποτελείται από ένα ζεύγος καμπτικών ροπών, για τις φλάντζες του πυρήνα, με ίδιο κατ' απόλυτο τιμή αλλά αντίθετου προσήμου μέγεθος σε απόσταση μεταξύ τους.

#### II.4.2. Διαμήκης φόρτιση πυρήνα

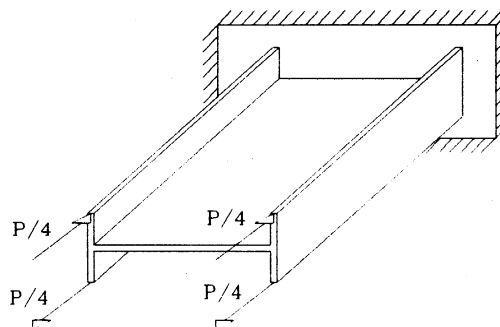
Εστω ο πυρήνας του σχήματος 4 ο οποίος υπόκειται σε μία έκκεντρη διαμήκη φόρτιση:



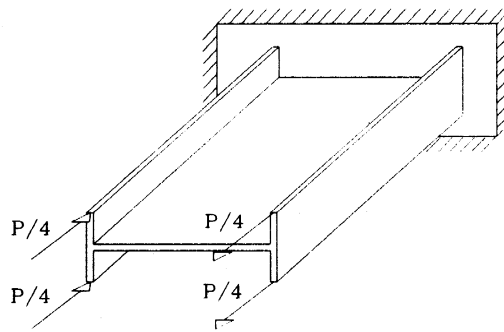
(α)



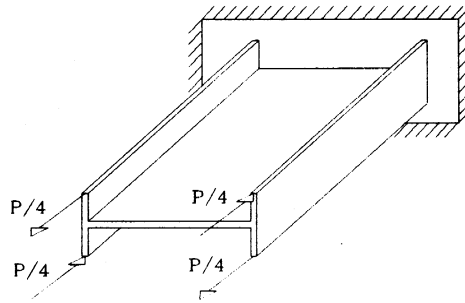
(β)



(γ)



(δ)



(ε)

Σχήμα 4. Φόρτιση πυρήνα

Ο πυρήνας φορτίζεται με την έκκεντρη φόρτιση του σχήματος (4α) η οποία αναλύεται στις φορτίσεις των υπολοίπων τεσσάρων σχημάτων, κάθε μία από τις οποίες προκαλεί:

- η φόρτιση (4β) εφελκυσμό σε ολόκληρο τον πυρήνα,
- η φόρτιση (4γ) καθαρή κάμψη στις φλάντζες,
- η φόρτιση (4δ) καθαρή κάμψη στον κορμό,
- η φόρτιση (4ε) στρεπτοκαμπτική καταπόνηση σε ολόκληρο τον πυρήνα.

Από τις ανωτέρω τέσσερεις καταπονήσεις του πυρήνα η τελευταία (4ε) είναι ίδια με την φόρτιση (β) του σχήματος 3.

Λόγω της φόρτισης αυτής οι δύο φλάντζες κάμπτονται με ίσες αλλά αντιθέτου προσήμου ροπές στο επίπεδο τους, η δε διατομή παρουσιάζει στρέβλωση, ενώ εμφανίζεται η διαμήκης διρροπή και ο πυρήνας στρέφεται. Είναι επομένως δυνατόν να εμφανιστεί στρέψη στον πυρήνα ακόμα και όταν αυτός φορτίζεται με διαμήκη φόρτιση. Από το παράδειγμα αυτό προκύπτει και το ακόλουθο συμπέρασμα: *"η διαμήκης φόρτιση ενός πυρήνα δεν είναι δυνατόν να αντικατασταθεί από ένα στατικά ισοδύναμο της αρχικής φόρτισης σύστημα"*. Με βάση το συμπέρασμα αυτό, αν η δύναμη  $P$  του προηγούμενου παραδείγματος αντικατασταθεί από μία μη έκκεντρη δύναμη η καταπόνηση του πυρήνα δεν θα είναι η ίδια. Σημειώνεται τέλος, ότι στρέβλωση εμφανίζεται ακόμα και σε μία δοκό συμπαγούς διατομής η οποία φορτίζεται έκκεντρα. Η στρέβλωση αυτή

όμως έχει τοπικό χαρακτήρα και μπορεί να αμεληθεί. Ομοίως σε πυρήνες κλειστής διατομής. Αντίθετα, σε πυρήνες ανοικτής διατομής η στρέβλωση (Warping) και οι συμπληρωματικές αξονικές τάσεις (Complementary Longitudinal Stresses) που προκαλούνται δεν μπορούν να αμεληθούν.

## II.5. Σύνοψη

Η κατηγορία των στοιχείων των κατασκευών η οποία αποτελείται από τους πυρήνες (Thin Walled Beams), η διατομή των οποίων συντίθεται από ένα σύνολο λεπτότοιχων διατομών συμπεριφέρεται διαφορετικά από τις συνήθεις δοκούς συμπαγούς διατομής, έναντι εγκάρσιας και διαμήκουσ φόρτισης.

Βασικό χαρακτηριστικό της συμπεριφοράς αυτής είναι η μη διατήρηση της επιπεδότητας των διατομών των πυρήνων στην παραμορφωμένη κατάσταση οι οποίες παρουσιάζουν στρέβλωση (Warping).

Αποτέλεσμα της στρέβλωσης είναι η ανάπτυξη συμπληρωματικών τάσεων (Complementary Longitudinal Stresses) στη διατομή του πυρήνα.

Η στρέβλωση εμφανίζεται όχι μόνο όταν ένας πυρήνας υπόκειται σε εγκάρσια αλλά και όταν υπόκειται και σε αξονική φόρτιση.

Ο Vlasov για να αναλύσει την συμπεριφορά των πυρήνων διετύπωσε μία θεωρία η οποία στηρίζεται σε δύο παραδοχές:

- μη παραμορφωμένη διατομή,
- μηδενική διατμητική παραμόρφωση της μέσης επιφάνειας (Middle Surface).

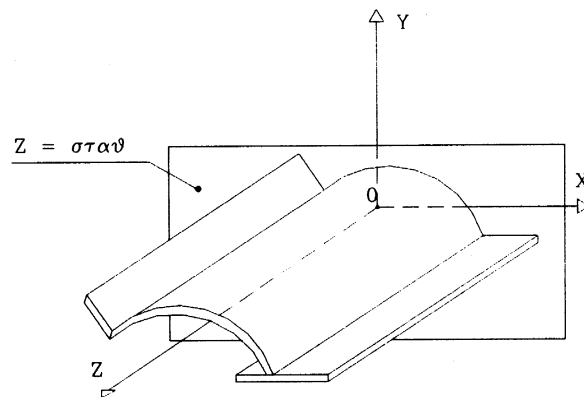


### III. Μετατοπίσεις - Παραμορφώσεις - Τομεακές ιδιότητες

Με βάση τις προηγούμενες δύο βασικές παραδοχές στην παράγραφο αυτή θα καθοριστούν οι κινηματικές σχέσεις πυρήνα και η σχέση μετακινήσεων παραμορφώσεων αυτού. Θα οριστούν επίσης οι τομεακές ιδιότητες διατομής πυρήνα.

#### III.1. Σύστημα τεταγμένων

Εστω ένας παράλληλος στον κεντροβαρικό άξονα, άξονας ο οποίος διατέμνει ένα τυχαίο επίπεδο με  $z = \text{σταθ.}$  στο σημείο  $\theta$  όπως εικονίζεται στο σχήμα 5:



Σχήμα 5. Σύστημα αξόνων

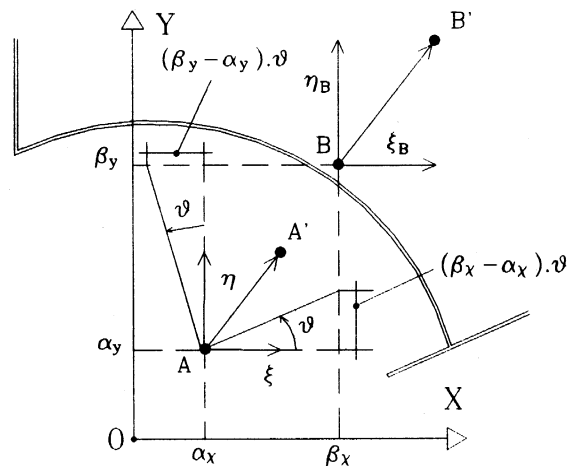
Το σύστημα αξόνων XYZ του σχήματος 5 είναι ένα τρισσορθογώνιο δεξιόστροφο σύστημα. Οι άξονες X και Y ανήκουν στο επίπεδο  $z = \text{σταθ.}$  και ο άξονας Z είναι παράλληλος με τον κεντροβαρικό άξονα της διατομής του πυρήνα.

#### III.2. Μετατοπίσεις τυχαίου σημείου διατομής πυρήνα

Η εύρεση των μετατοπίσεων τυχόντος σημείου διατομής πυρήνα γίνεται με βάση την πρώτη από τις δύο παραδοχές της θεωρίας Vlasov, σύμφωνα με την οποία τυχαία διατομή πυρήνα κατά την παραμόρφωση του μετατοπίζεται ως στερεό σώμα.

Με χρήση της κινηματικής θεωρίας στερεού σώματος είναι δυνατόν να προσδιοριστούν οι μετατοπίσεις οποιουδήποτε σημείου της διατομής αυτής.

Στο ακόλουθο σχήμα 6 εικονίζονται μία διατομή, οι άξονες X, Y και δύο σημεία A και B συνδεδεμένα με αυτήν:



**Σχήμα 6.** Μετατόπιση σημείων διατομής

Εστω  $\alpha_x, \alpha_y, \beta_x, \beta_y$ , οι προβολές των A και B στους άξονες X και Y, A' η τελική θέση του A, μετά την μετατόπιση της διατομής ως στερεό σώμα, και  $\theta$  η γωνία στροφής της διατομής ως στερεό σώμα με κέντρο το σημείο A. Λόγω του ότι  $\theta = \theta(z)$  η γωνία  $\theta$  είναι η γωνία στρέψης κατά μήκος του πυρήνα.

Σημειώνεται εδώ ότι σύμφωνα με την κινηματική θεωρία στερεού σώματος, η τελική θέση αυτού περιγράφεται επακριβώς όταν είναι γνωστά τα εξής: η τελική θέση ενός σημείου του σώματος και η γωνία στροφής περί το σημείο αυτού.

Με βάση τα ανωτέρω η τελική θέση B' του σημείου B υπολογίζεται για θετική  $\theta$  - (η  $\theta$  λαμβάνεται θετική όταν έχει την αντίθετη φορά των δεικτών του ρολογιού) - δηλ. κατά την φορά του τρισσορθογώνιου συστήματος αξόνων, από τις σχέσεις:

$$\xi_B = \xi - (\beta_y - \alpha_y) \cdot \theta = 0 \quad (\text{III.1.}\alpha)$$

$$\eta_B = \eta + (\beta_x - \alpha_x) \cdot \theta = 0 \quad (\text{III.1.}\beta)$$

Για μικρές τιμές των  $\theta$  και  $\eta$ , όπως προς την μονάδα η κίνηση της διατομής και μαζί με αυτήν των σημείων A και B τα οποία είναι στέρα συνδεδεμένα με αυτήν μπορεί να θεωρηθεί ως περιστροφή μόνο περί τον *στιγμαίο πόλο περιστροφής*. Λαμβάνοντας το B ως στιγμιαίο πόλο περιστροφής (θέτοντας  $\xi_B = 0, \eta_B = 0$  στις σχέσεις III.1) προκύπτει:

$$\xi + (\beta_y - \alpha_y) \cdot \theta = 0 \quad (\text{III.2.}\alpha)$$

$$\eta + (\beta_x - \alpha_x) \cdot \theta = 0 \quad (\text{III.2.}\alpha)$$

όπου  $\beta_x, \beta_y$  είναι οι συντεταγμένες του στιγμιαίου πόλου περιστροφής.

Από τις σχέσεις (III.2) προκύπτει:

$$\beta_x = \alpha_x - \frac{n}{\theta} \quad (\text{III.3.}\alpha)$$

$$\beta_y = \alpha_y + \frac{\xi}{\theta} \quad (\text{III.3.}\beta)$$

Ο στιγμιαίος πόλος περιστροφής καλείται και *κέντρο στρέψης* (Torsion Center).

Κάθε καμπύλη η οποία υπολογίζεται από τις σχέσεις (III.3) καλείται *γραμμή των κέντρων στρέψης* (Line of Torsion Centers).

### III.3. Εύρεση των φυσικών μετατοπίσεων τυχαίου σημείου της μέσης επιφάνειας

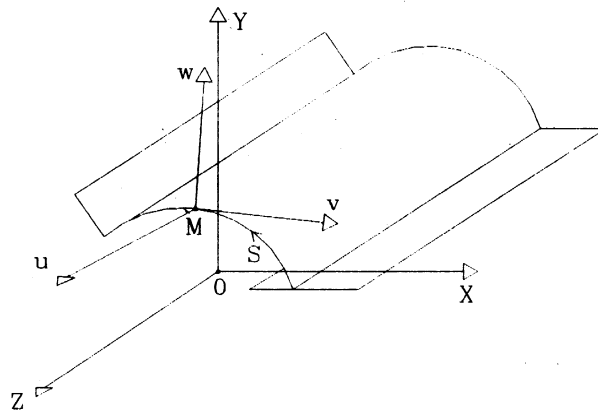
Η πλήρης μετατόπιση ενός σημείου M της μέσης επιφάνειας (Middle Surface) ενός πυρήνα περιγράφεται από τρεις συνιστώσες οι οποίες είναι:

1) Η διαμήκη μετατόπιση u, η οποία λαμβάνεται θετική εάν έχει την θετική φορά του άξονα Z.

2) Η εφαπτομενική στην γραμμή της διατομής (Profile Line) μετατόπιση v, η οποία λαμβάνεται θετική εάν έχει την διεύθυνση της θετικής φοράς του άξονα S.

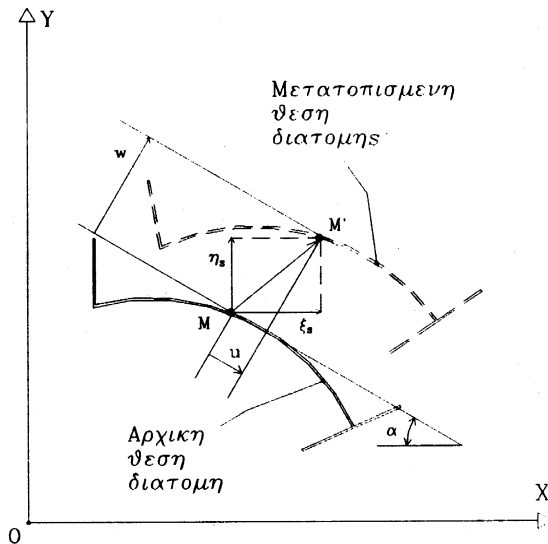
3) Η κάθετη στην εφαπτομένη της γραμμής της διατομής, της οποίας η θετική φορά λαμβάνεται τέτοια ώστε να σχηματίζει με τις u, v ένα δεξιόστροφο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.

Στην γενική περίπτωση οι u, v, w είναι συναρτήσεις των Z και S. Στο ακόλουθο σχήμα 7 εικονίζονται οι μετατοπίσεις u, v, w ενός τυχαίου σημείου M της μέσης επιφάνειας (Profile Line) ενός πυρήνα:



Σχήμα 7. Μετατοπίσεις τυχαίου σημείου

Για τον υπολογισμό των u, w ενός τυχαίου σημείου M της μέσης επιφάνειας με βάση το σχήμα 8 προκύπτει:



Σχήμα 8. Αρχική - τελική θέση διατομής

$$\xi_s = \xi + (y - \alpha_y) \cdot \theta \quad (\text{III.4.}\alpha)$$

$$n_s = n + (x - \alpha_x) \cdot \theta \quad (\text{III.4.}\beta)$$

όπου οι σχέσεις (III.4) προέκυψαν από τις εξισώσεις (III.1) και:

- $\xi_s, n_s$  οι προβολές της μετατόπισης του σημείου M από την αρχική θέση στην τελική θέση M' κατά X και Y,
- $\xi, n$  οι προβολές της μετατόπισης του σημείου A κατά X και Y,
- X, Y οι συντεταγμένες της αρχικής θέσης του σημείου M,
- $\theta$  η στροφή της διατομής περί του σημείου A.

Θεωρώντας ως  $\alpha$  την γωνία μεταξύ της εφαπτομένης στην γραμμή της διατομής (Profile Line) στο σημείο M και τον άξονα X προκύπτει:

$$u(z,s) = \xi_s \cdot \cos \alpha + n_s \cdot \sin \alpha \quad (\text{III.5.}\alpha)$$

$$w(z,s) = n_s \cdot \cos \alpha + \xi_s \cdot \sin \alpha \quad (\text{III.5.}\beta)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των  $\xi_s$  και  $n_s$  από την (III.4) στις (III.5) και (III.6) προκύπτει:

$$u(z,s) = \xi \cdot \cos \alpha + n \cdot \sin \alpha + \left[ (x - \alpha_x) \cdot \sin \alpha - (y - \alpha_y) \cdot \cos \alpha \right] \cdot \theta \quad (\text{III.7.}\alpha)$$

$$w(z,s) = -\xi \cdot \sin \alpha + n \cdot \cos \alpha + \left[ (x - \alpha_x) \cdot \cos \alpha + (y - \alpha_y) \cdot \sin \alpha \right] \cdot \theta \quad (\text{III.7.}\beta)$$

θέτοντας:

$$h(s) = (x - \alpha_x) \cdot \sin \alpha - (y - \alpha_y) \cdot \cos \alpha \quad (\text{III.8.}\alpha)$$

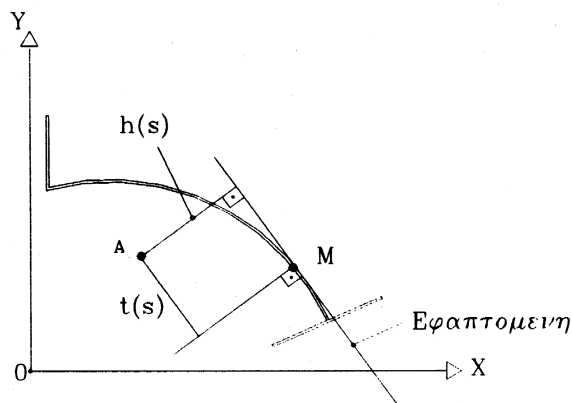
$$t(s) = (x - \alpha_x) \cdot \cos \alpha + (y - \alpha_y) \cdot \sin \alpha \quad (\text{III.8.}\beta)$$

στις σχέσεις (III.7) προκύπτουν οι σχέσεις:

$$u(z,s) = \xi(z) \cdot \cos \alpha(s) + n(z) \cdot \sin \alpha(s) + \theta(z) \cdot h(s) \quad (\text{III.9.}\alpha)$$

$$w(z,s) = -\xi(z) \cdot \sin \alpha(s) + n(z) \cdot \cos \alpha(s) + \theta(z) \cdot f(s) \quad (\text{III.9.}\beta)$$

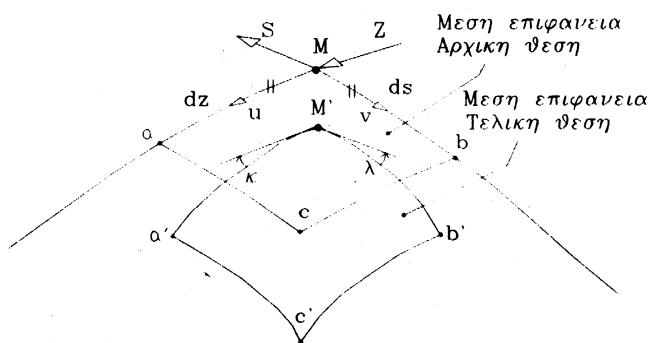
όπου τα μεγέθη  $h(s)$  και  $t(s)$  εικονίζονται στο ακόλουθο σχήμα 9:



Σχήμα 9. Αποστάσεις  $h(s)$  και  $t(s)$

Για τον υπολογισμό της  $u$  θα γίνει χρήση της δεύτερης παραδοχής της θεωρίας Vlasov (δηλ. δεν υφίστανται διαμητικές παραμορφώσεις στην μέση επιφάνεια (Middle Surface)).

Στο ακόλουθο σχήμα 10 εικονίζεται ένα στοιχειώδες τετράπλευρο με πλευρές  $dz$ ,  $ds$  της μέσης επιφάνειας και η παραμορφωμένη θέση αυτού.



Σχήμα 10. Διαμητική παραμόρφωση της μέσης επιφάνειας

η διαμητική παραμόρφωση του τετραπλεύρου στο σημείο  $M$  είναι ίση με το άθροισμα των γωνιών  $\kappa$  και  $\lambda$  μέσω των οποίων οι πλευρές  $M_a$  και  $M_b$  στρέφονται από την αρχική στην θέση του τετραπλεύρου.

Θέτοντας  $\gamma$  τη διαμητική παραμόρφωση στο  $M$  προκύπτει:

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (\text{III.11})$$

και με βάση την δεύτερη υπόθεση:

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.12})$$

Με την έκφραση της  $u(z,s)$  γνωστή από την σχέση (III.9) η σχέση (III.12) επιλύεται ως προς  $u(z,s)$  και προκύπτει:

$$u(z,s) = \zeta(z) - \int_{M_1}^M \frac{\partial u}{\partial z} ds \quad (\text{III.13})$$

όπου:

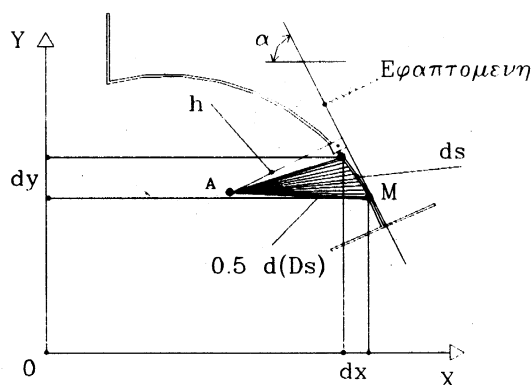
- $M_1$ , ένα αυθαίρετο σημείο το οποίο λαμβάνεται ως αρχή του άξονα  $S$ ,
- $\zeta(z)$ , συνάρτηση η οποία περιγράφει την διαμήκη μετατόπιση του  $M_1$ ,
- $M$ , το σημείο η  $u(z,s)$  του οποίου υπολογίζεται με την σχέση (III.13).

#### III.4. Τομεακές ιδιότητες

Η σχέση (III.13) μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: διαφορίζοντας ως προς  $z$  την σχέση (III.9) και πολλαπλασιάζοντας και τις δύο πλευρές με  $ds$  προκύπτει:

$$\frac{\partial u}{\partial z} ds = \xi'(z) \cdot \cos \alpha(s) \cdot ds + n'(z) \cdot \sin \alpha(s) \cdot ds + \theta'(z) \cdot h(s) \cdot ds \quad (\text{III.14})$$

από το ακόλουθο σχήμα 11 προκύπτει:



Σχήμα 11. Γεωμετρικές σχέσεις

$$\cos \alpha \cdot ds = dx \quad (\text{III.15.}\alpha)$$

$$\sin \alpha \cdot ds = dy \quad (\text{III.15.}\beta)$$

$$h \cdot ds = d(Ds) \quad (\text{III.15.}\gamma)$$

αντικαθιστώντας τις σχέσεις (III.14) και (III.15) στην σχέση (III.13) και ολοκληρώνοντας προκύπτει:

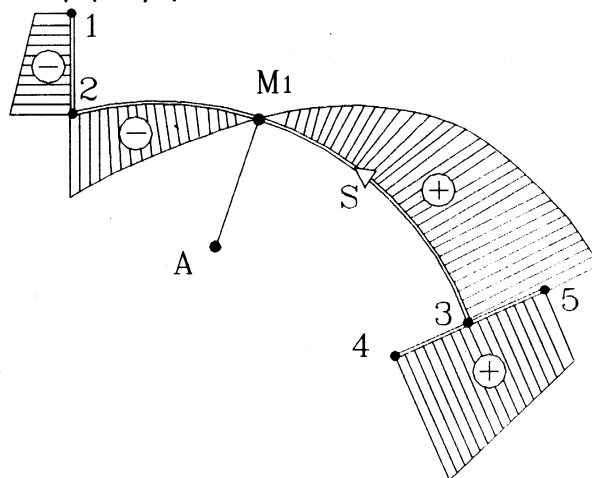
$$u(z,s) = \zeta(z) - \xi'(z) \cdot x(s) - \eta'(z) \cdot y(s) - \theta'(z) \cdot D_S \quad (\text{III.16})$$

όπου:

- $\zeta(z)$ , συνάρτηση η οποία περιγράφει την διαμήκη μετατόπιση του σημείου που λαμβάνεται ως αρχή μέτρησης του άξονα S,
- $\xi(z)$ ,  $\eta(z)$ , προβολές της μετατόπισης στους άξονες X και Y αντίστοιχα, σημείου A το οποίο χρησιμεύει στην περιγραφή της μετατόπισης ως στερεό σώμα της διατομής του πυρήνα,
- $x(s)$ ,  $y(s)$ , οι καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου M του οποίου την μετατόπιση  $u(z,s)$  υπολογίζει ο τύπος (III.13).
- $\theta'(z)$ , η στροφή περί του σημείου A της διατομής για  $z=\text{σταθ}$ . Η γωνία αυτή προκαλείται από την στρέψη του πυρήνα.
- $D_S$ , το διπλάσιο της επιφάνειας που περικλείεται ανάμεσα στο τόξο  $M_1M$ , ( $M_1$  η αφετηρία μέτρησης της συντεταγμένης S), και τις ακτίνες  $AM_1$  και  $AM$ .

Η συνάρτηση  $D_S = \int h \cdot ds$  ορίζεται ως *μέτρο στρέβλωσης* (Sectorial Area - τομεακή περιοχή), το σημείο A καλείται *πόλος*, ενώ το σημείο  $M_1$  καλείται *όρισμα* (Sectorial Origin), το ευθύγραμμο τμήμα  $AM_1$  καλείται *σταθερό ακτινικό διάνυσμα* (Fixed Radius Vector) και το ευθύγραμμο τμήμα  $AM$  το οποίο συνδέει τον πόλο A με το σημείο M για το οποίο υπολογίζεται το μέτρο στρέβλωσης  $D_S$  καλείται *κινητό ακτινικό διάνυσμα* (Mobile Radius Vector).

Θετική φορά διαγραφής του μέτρου στρέβλωσης (Sectorial Area)  $\omega(s)$  θεωρείται αυτή για την οποία το κινητό ακτινικό διάνυσμα (Mobile Radius Vector)  $AM$  κινείται αντιωρολογιακά. Στο ακόλουθο σχήμα 12 εικονίζεται το  $D_S$  για μία τυχαία διατομή πυρήνα.



Σχήμα 12. Μέτρο στρέβλωσης τυχαίου πυρήνα.

### III.5. Παρατηρήσεις επί της σχέσης εύρεσης της $u(z,s)$

Η σχέση (III.16) η οποία δίνει την διαμήκη μετατόπιση σε τυχαίο σημείο M της μέσης επιφάνειας με  $z$ =σταθ. περιέχει τέσσερεις όρους:

$$u(z,s) = \zeta(z) - \xi'(z) \cdot x(s) - \eta'(z) \cdot y(s) - \theta'(z) \cdot D_s$$

ο κάθε ένας από τους οποίους εκφράζει:

- ο όρος  $\zeta(z)$  την κοινή για όλα τα σημεία της διατομής διαμήκη μετατόπιση κατά τον διαμήκη άξονα Z,
- ο όρος  $\xi'(z) \cdot x(s)$  την διαμήκη μετατόπιση του σημείου M λόγω κάμψης στο επίπεδο OXZ,
- ο όρος  $\eta'(z) \cdot y(s)$  την διαμήκη μετατόπιση λόγω κάμψης στο επίπεδο OYZ.

Οι διαμήκεις μετατοπίσεις που εκφράζουν οι τρεις αυτοί όροι δεν παραβιάζουν την επιπεδότητα των διατομών (διατομές επίπεδες πριν την φόρτιση του πυρήνα παραμένουν επίπεδες μετά την επιβολή των μετατοπίσεων που εκφράζουν οι ανωτέρω τρεις όροι).

- ο όρος  $\theta'(z) \cdot D_s$  εκφράζει διαμήκεις μετατοπίσεις οι οποίες προέρχονται από στρεπτική καταπόνηση του πυρήνα ( $\theta(z)$  - γωνία στρέψης), προκαλούν στρέβλωση της διατομής και δεν είναι συμβιβαστές με τον νόμο της επιπεδότητας των διατομών.

Η διαφοροποίηση που επιβάλλει ο τέταρτος όρος στην κατανομή των διαμήκων μετατοπίσεων του πυρήνα καλείται *στρέβλωση διατομής* (Sectorial Warping). Η ποσότητα  $\theta'(z) = \frac{d\theta}{dz}$  η οποία εκφράζει την μεταβολή της γωνίας  $\theta(z)$  κατά μήκος του πυρήνα ονομάζεται *στρεπτική στρέβλωση* (Torsional Warping) του πυρήνα.

### III.6. Διαμήκης παραμόρφωση $\varepsilon$

Με βάση την σχέση (III.16) και την σχέση:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial z} \quad (III.17)$$

προκύπτει:

$$\varepsilon(z,s) = \zeta'(z) - \xi''(z) \cdot x(s) - \eta''(z) \cdot y(s) - \theta''(z) \cdot D_s \quad (III.18)$$

Ανάλογα με την σχέση (III.16) οι τρεις πρώτοι όροι παράγουν παραμορφώσεις συμβατές με τον νόμο της επιπεδότητας των διατομών και είναι γνωστές από την κλασική θεωρία της δοκού ενώ ο τέταρτος παράγει



Ανάλογα με την σχέση (III.16) οι τρεις πρώτοι όροι παράγουν παραμορφώσεις συμβατές με τον νόμο της επιπεδότητας των διατομών και είναι γνωστές από την κλασσική θεωρία της δοκού ενώ ο τέταρτος παράγει παραμορφώσεις οι οποίες δεν είναι συμβιβαστές με τον νόμο της επιπεδότητας των διατομών.

### III.7. Συμπεράσματα

Η εξίσωση (III.18) δίνει την διαμήκη παραμόρφωση τυχαίου σημείου με συντεταγμένες  $(z,s)$  της μέσης επιφάνειας πυρήνα. Η παραμόρφωση αυτή χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι οι γεννήτρες με  $s=\text{σταθ.}$  υπόκεινται σε σχετικές διαμήκεις παραμορφώσεις οι οποίες δύνανται να έχουν διαφορετικές τιμές σε διαφορετικά σημεία της μέσης επιφάνειας.

Εστω ότι η παραμόρφωση  $\varepsilon(z,s)$  είναι μηδέν για κάθε σημείο της μέσης επιφάνειας (Middle Surface):  $\varepsilon(z,s)=0$ , από την σχέση (III.18) προκύπτει:

$$\varepsilon(z,s) = \zeta'(z) - \xi''(z) \cdot x(s) - \eta''(z) \cdot y(s) - \theta''(z) \cdot Ds = 0 \quad (\text{III.19})$$

οι ποσότητες  $1, x(s), y(s), \omega(s)$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητες άρα ο μηδενισμός της σχέσης (III.19) για κάθε  $s$  απαιτεί:

$$\zeta'(z) = 0, \quad \xi''(z) = 0, \quad \eta''(z) = 0, \quad \theta''(z) = 0$$

από όπου ολοκληρώνοντας προκύπτει:

$$\zeta(z) = \zeta_0 \quad (\text{III.20.α})$$

$$\xi(z) = \xi_0 + \xi'_0 \cdot z \quad (\text{III.20.β})$$

$$\eta(z) = \eta_0 + \eta'_0 \cdot z \quad (\text{III.20.γ})$$

$$\theta(z) = \theta_0 + \theta'_0 \cdot z \quad (\text{III.20.δ})$$

όπου οι σταθερές της ολοκλήρωσης  $\zeta_0, \xi_0, \xi'_0, \eta_0, \eta'_0, \theta_0, \theta'_0$  είναι αυθαίρετες ποσότητες, από τις οποίες οι  $\zeta_0, \xi_0, \eta_0$  είναι οι προβολές του διανύσματος της μετατόπισης του επιπέδου  $z=0$  σε τρεις κάθετους μεταξύ τους άξονες και οι  $\xi'_0, \eta'_0, \theta'_0$  είναι οι συνιστώσες του διανύσματος της περιστροφής του ίδιου επιπέδου περί τους αυτούς άξονες.

Με βάση τα παραπάνω οι σταθερές αυτές είναι οι βαθμοί ελευθερίας της μέσης επιφάνειας όταν αυτή κινείται στον χώρο των τριών διαστάσεων ως στερεό σώμα και μπορούν να τεθούν ίσες με μηδέν καθώς δεν παράγουν παραμόρφωση αλλά μόνο μετατόπιση στερεού σώματος:

$$\zeta_0 = \xi_0 = \xi'_0 = \eta_0 = \eta'_0 = \theta_0 = \theta'_0 = 0 \quad (\text{III.21})$$

Η εξίσωση (III.20.δ) για  $\theta_0$  γίνεται:

$$\theta(z) = \theta'_0 \cdot z \quad (\text{III.22})$$

δεν περιλαμβάνει κίνηση στερεού σώματος και δείχνει ότι δεν είναι δυνατόν να υπάρξει  $\varepsilon(z,s)=0$  για κάθε  $z$  και  $s$  αν  $\theta'_0 \neq 0$ , όπου  $\theta'_0$  είναι η στρέβλωση (Warping) του θεωρούμενου αρχικού επιπέδου  $z=0$ .

Επομένως όταν  $\theta'_0 \neq 0$  η γωνία στροφής  $\theta(z)$  δίνεται από την σχέση (III.22) και η μεταβολή της γωνίας αυτής ( $\theta'(z)$ ) κατά μήκος του άξονα  $Z$  η οποία εκφράζει την στρέβλωση της διατομής  $z=0$  είναι σταθερή και ίση με  $\theta'_0$ , η ισοδύναμη στρέβλωση της διατομής  $z=0$  συνεπάγεται στρεπτική παραμόρφωση ολόκληρου του πυρήνα.

#### IV. Εκφραση των $\varepsilon(z,s)$ και $u(z,s)$ συναρτήσεων των τομιακών ιδιοτήτων

##### IV.1. Εισαγωγή

Στην παράγραφο III διετυπώθηκε η εξίσωση (III.18) η οποία δίνει την διαμήκη παραμόρφωση του πυρήνα:

$$\varepsilon(z,s) = \zeta'(z) - \xi''(z) \cdot x(s) - \eta''(z) \cdot y(s) - \theta''(z) \cdot D_S$$

Η συνάρτηση  $\varepsilon(z,s)$  αποτελείται από τέσσερις όρους. Ο πρώτος όρος ( $\zeta'(z)$ ) παραμένει σταθερός για κάθε  $s$  κατά μήκος της γραμμής της διατομής (Profile Line), οι όροι δεύτερος και τρίτος ( $\xi''(z) \cdot x(s)$ ,  $\eta''(z) \cdot y(s)$ ) είναι αντίστοιχα ανάλογοι με τις αποστάσεις του σημείου του οποίου η  $\varepsilon(z,s)$  υπολογίζεται από τους άξονες  $X$  και  $Z$  και ο τέταρτος όρος είναι ανάλογος του μέτρου στρέβλωσης (Sectorial Area)  $D_S$ . Και οι τέσσερις αυτοί όροι είναι συναρτήσεις του  $s$ , επομένως εξαρτώνται από το τόξο της γραμμής της διατομής (Profile Line). Στις ακόλουθες παραγράφους θα δειχτεί ότι η συνάρτηση  $\varepsilon(z,s)$  μπορεί να εκφραστεί μόνο συναρτήσει των τομιακών ιδιοτήτων, αν επιλεγεί ο κατάλληλος πόλος.

##### IV.2. Υπολογισμός των $\varepsilon(z,s)$ και $u(z,s)$ συναρτήσεων του $D_S$

Η σχέση υπολογισμού του  $D_S$  λόγω αλλαγής πόλου είναι:

$$D_{SA} = D_{SD} + (a_x - d_x) \cdot x - (a_x - d_x) \cdot y + C \quad (IV.1)$$

όπου:

- $A(a_x, a_y)$ ,  $D(d_x, d_y)$  και πόλοι,
- $(x, y)$  οι συντεταγμένες σημείου της γραμμής της διατομής του οποίου υπολογίζονται τα  $D_{SA}$ ,  $D_{SD}$  και  $C$  σταθερά η οποία εξαρτάται από την αρχή μέτρησης του τόξου  $s$  και δίνεται από τον τύπο:

$$C = -(a_y - d_y) \cdot x_0 + (a_x - d_x) \cdot y_0 \quad (IV.2)$$

όπου:

- $(x_0, y_0)$  οι συντεταγμένες του σημείου που λαμβάνεται ως αρχή μέτρησης του τόξου  $s$ .

Εκφράζοντας την σχέση (III.18) η οποία αρχικά αναφέρεται στον πόλο  $A$  έτσι ώστε να αναφέρεται στον πόλο  $D$  προκύπτει:

$$\varepsilon(z,s) = \zeta' - C \cdot \theta'' - \left[ \xi'' + (a_y - d_y) \cdot \theta'' \right] \cdot x - \left[ \eta'' - (a_x - d_x) \cdot \theta'' \right] \cdot y - \theta'' \cdot D_{SD} \quad (IV.3.)$$

επιλέγοντας τις ποσότητες  $C$ ,  $d_x$ ,  $d_y$  τέτοιες ώστε:

$$\zeta' - C \cdot \theta'' = 0 \quad (\text{IV.4.}\alpha)$$

$$n'' - (\alpha_x - d_x) \cdot \theta'' = 0 \quad (\text{IV.4.}\beta)$$

$$\xi'' + (\alpha_y - d_y) \cdot \theta'' = 0 \quad (\text{IV.4.}\gamma)$$

προκύπτει:

$$C = \frac{\zeta'}{\theta''} \quad (\text{IV.5.}\alpha)$$

$$d_x = \alpha_x - \frac{n''}{\theta''} \quad (\text{IV.5.}\beta)$$

$$d_y = \alpha_y + \frac{\xi''}{\theta''} \quad (\text{IV.5.}\gamma)$$

αντικαθιστώντας τις ποσότητες αυτές στην σχέση (IV.3) προκύπτει:

$$\varepsilon(z,s) = -\theta''(z) \cdot D_{SD}(z,s) \quad (\text{IV.6})$$

το σημείο  $D$  ονομάζεται *κέντρο στρέβλωσης* (Sectorial Warping Center).

Με ανάλογη διαδικασία προκύπτει για την  $u(z,s)$ :

$$u(z,s) = -\theta'(z) \cdot D_{SE}(z,s) \quad (\text{IV.7})$$

όπου:

- το σημείο  $E$  ονομάζεται *κέντρο απόλυτης στρέβλωσης* (Sectorial Center of Absolute Warping) οι συντεταγμένες του οποίου υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\varepsilon_x = \alpha_x - \frac{n'}{\theta'} \quad (\text{IV.8.}\alpha)$$

$$\varepsilon_y = \alpha_y - \frac{\xi'}{\theta'} \quad (\text{IV.8.}\beta)$$

- σταθερά  $C$  είναι:  $C = \frac{\zeta}{\theta'}$  (IV.9)

### IV.3. Σύνοψη

Στην παράγραφο αυτή διευκρινίστηκαν οι σχέσεις υπολογισμού των  $\varepsilon(z,s)$  και  $u(z,s)$  συναρτήσει των τομιακών ιδιοτήτων. Για την πρώτη σχέση ο πόλος ονομάζεται κέντρο στρέβλωσης και δίνεται από τις σχέσεις (IV.5) και για την δεύτερη ονομάζεται κέντρο απόλυτης στρέβλωσης και δίνεται από τις σχέσεις (IV.8) και (IV.9).

## V. Σχέση τάσεων παραμορφώσεων

### V.1. Εισαγωγή

Η ανάλυση των πυρήνων έχει στηριχτεί μόνο στις κινηματικές παραδοχές της κίνησης της διατομής ως στερεό σώμα και στην έλλειψη διατμητικών παραμορφώσεων της μέσης επιφάνειας (Middle Surface). Με βάση τις εξισώσεις αυτές διατυπώθηκε η σχέση (III.18) η οποία δίνει τις διαμήκειες παραμορφώσεις  $\varepsilon(z,s)$ , συναρτήσεων των  $\zeta(z)$ ,  $\xi(z)$ ,  $\eta(z)$  και  $\theta(z)$  οι οποίες είναι άγνωστες. Για τον υπολογισμό των παραπάνω τεσσάρων μεγεθών θα γίνει χρήση των εξισώσεων ισορροπίας.

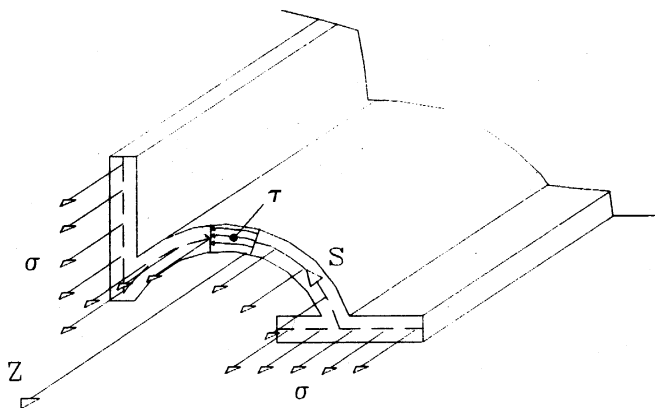
Στην παρούσα παράγραφο θα εκφραστεί η σχέση τάσεων παραμορφώσεων σύμφωνα με τον νόμο του Hooke και με βάση αυτήν θα διατυπωθούν οι εξισώσεις ισορροπίας.

### V.2. Κατανομή των τάσεων που εμφανίζονται σε διατομή πυρήνα

Σε μία τυχαία διατομή πυρήνα θεωρείται ότι εμφανίζονται μόνο δύο κατηγορίες τάσεων :

- ορθές τάσεις  $\sigma$  παράλληλες με τον διαμήκη άξονα του πυρήνα και ομοιόμορφη κατανομή κατά το πάχος της διατομής,
- διατμητικές τάσεις  $\tau$  με φορά αυτήν της εφαπτομένης στην γραμμή της διατομής και γραμμική κατανομή κατά το πάχος της διατομής.

Οι δύο αυτές κατηγορίες τάσεων εικονίζονται στο ακόλουθο σχήμα 13 :

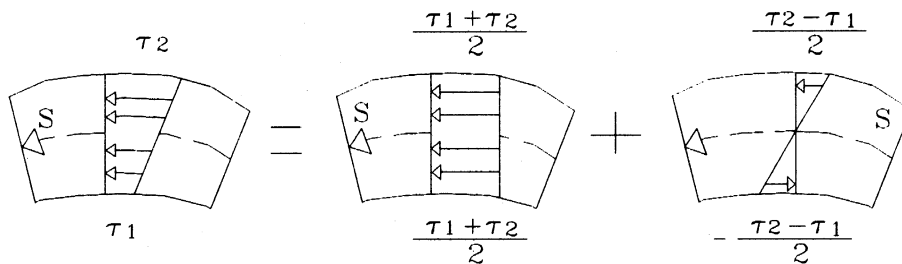


Σχήμα 13. Τάσεις διατομής πυρήνα

Η πρώτη κατηγορία τάσεων προκαλεί δυνάμεις κατά τον διαμήκη άξονα  $Z$  του πυρήνα και η δεύτερη, δυνάμεις κατά την εφαπτομένη στην γραμμή της διατομής (Profile Line) και στρεπτική ροπή. Ο υπολογισμός των δυνάμεων

κατά τον άξονα  $Z$  είναι απλός και προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό των τάσεων  $\sigma$  με το πάχος της διατομής. Ο υπολογισμός των εφαπτομενικών δυνάμεων και της στρεπτικής ροπής γίνεται με την ανάλυση η οποία ακολουθεί.

Η αρχική κατανομή των διατμητικών τάσεων  $\tau$  διαχωρίζεται σε δύο όρους. Ο πρώτος έχει ομοιόμορφη, κατά το πάχος της διατομής, κατανομή με τιμή  $\frac{\tau_1 + \tau_2}{2}$ , και ο δεύτερος τριγωνική κατανομή με ακραίες τιμές  $\frac{\tau_2 - \tau_1}{2}$  και  $-\frac{\tau_2 - \tau_1}{2}$ . Οι κατανομές αυτές εικονίζονται στο ακόλουθο σχήμα 14.



Σχήμα 14. Κατανομή διατμητικών τάσεων

Από το σχήμα (14.β) και την τιμή των διατμητικών τάσεων  $\frac{\tau_1 + \tau_2}{2}$  υπολογίζονται οι εφαπτομενικές δυνάμεις. Η στρεπτική ροπή προκύπτει ως αποτέλεσμα του αντίθετου προσήμου των δύο ακραίων τιμών της κατανομής του σχήματος (14γ) και συμβολίζεται με  $T_1(z)$ .

Αρα, σε τυχαία διατομή πυρήνα σύμφωνα με την θεωρία του Vlasov αναπτύσσονται : ορθές τάσεις  $\sigma(z,s)$  κατά τον διαμήκη άξονα, εφαπτομενικές διατμητικές τάσεις  $\tau(z,s)$  κατά την εφαπτομένη στην γραμμή της διατομής (Profile Line) και στρεπτική ροπή  $T_1(z)$ .

Η σήμανση των ανωτέρω μεγεθών ακολουθεί τις εξής συμβάσεις :

- μια επιφάνεια θεωρείται θετική αν το κάθετο σε αυτήν διάνυσμα έχει την φορά του άξονα  $+Z$ ,
- οι τάσεις  $\sigma$ ,  $\tau$  είναι θετικές αν έχουν την θετική φορά των αξόνων  $Z$  και  $S$  αντίστοιχα,
- η στρεπτική ροπή  $T_1(z)$  είναι θετική αν προκαλεί αντιωρολογιακής φοράς περιστροφή για παρατηρητή ο οποίος βρίσκεται στην θετική πλευρά της διατομής.

### V.3. Εύρεση των $\sigma(z,s)$

Από τον νόμο του Hooke προκύπτει :

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \cdot (\sigma - \nu \cdot \sigma_1) \quad (\text{V.1.}\alpha)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_1 - \nu \cdot \sigma) \quad (\text{V.1.}\beta)$$

όπου  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_1$  οι παραμορφώσεις κατά την διαμήκη και την εγκάρσια διάσταση,  $\sigma$ ,  $\sigma_1$  οι τάσεις κατά τις αυτές διαστάσεις και  $\nu$  ο λόγος Poisson.

Σύμφωνα με την πρώτη βασική γεωμετρική υπόθεση, τυχαία διατομή του πυρήνα μένει απαραμόρφωτη επομένως  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\sigma_1 - \nu \cdot \sigma = 0$  και

$$\sigma_1 = \nu \cdot \sigma \quad (\text{V.2})$$

Από τις σχέσεις (V.1) και (V.2) προκύπτει :

$$\varepsilon = \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot \sigma \quad (\text{V.3})$$

και θέτοντας

$$E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (\text{V.4})$$

από την σχέση (V.3) προκύπτει :

$$\sigma = E_1 \cdot \varepsilon \quad (\text{V.5})$$

και αγνοώντας την ποσότητα  $\nu^2$  προκύπτει :  $E_1 = E$ .

Αντικαθιστώντας την σχέση (III.18) η οποία δίνει την  $\varepsilon(z,s)$  στην σχέση (V.5) προκύπτει :

$$\sigma(z,s) = E \cdot (\zeta'(z) - \xi''(z) \cdot x(s) - \eta''(z) \cdot y(s) - \theta''(z) \cdot D_S) \quad (\text{V.5})$$

και ανάλογα με την διαδικασία της παραγράφου IV.2 οι  $\sigma(z,s)$  εκφράζονται συναρτήσεσιν των τομεακών ιδιοτήτων :

$$\sigma(z,s) = -E \cdot \theta''(z) \cdot D_{SD}(z,s) \quad (\text{V.6})$$

Η σχέση (V.6) είναι μια προέκταση της θεωρίας του Saint Venant με βασική από αυτήν διαφορά ότι εκτός των ορθών τάσεων  $\sigma$  λόγω αξονικής καταπόνησης ( $E \cdot \zeta'(z)$ ) και λόγω κάμψης περί δύο αξόνων ( $E \cdot \xi''(z) \cdot x(s)$ ) και ( $E \cdot \eta''(z) \cdot y(s)$ ) δίνει και τις ορθές τάσεις λόγω στρέψης ( $E \cdot \theta''(z) \cdot D_S$ ) οι οποίες στην θεωρία Saint Venant αμελούνται.

#### V.4. Εύρεση της στρεπτικής ροπής $T_1(z)$ .

Η στρεπτική ροπή  $T_1(z)$ . υπολογίζεται από την σχέση :

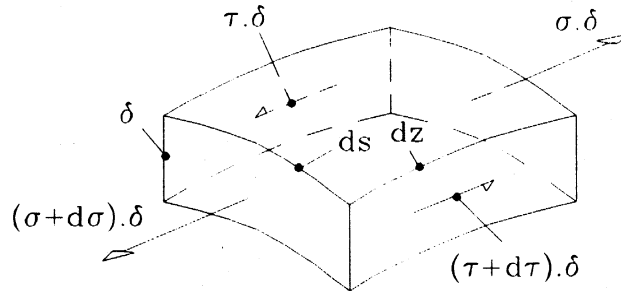
$$T_1 = G \cdot J_d \cdot \theta' \quad (V.7)$$

όπου :

- $J_d = \frac{\alpha}{3} \cdot \sum d \cdot \delta^2$  (V.8)
- $d, \delta$  πάχος και πλάτος των λεπτότοιχων διατομών που αποτελούν την διατομή του πυρήνα,
- $\alpha$  συντελεστής = 1.

#### V.5. Εύρεση των διατμητικών τάσεων $\tau(z,s)$

Από την ισορροπία ενός στοιχειώδους τμήματος  $ds, dz$  πάχους  $\delta$  του πυρήνα προκύπτει :



Σχήμα 15. Ισορροπία στοιχειώδους τμήματος  $ds dz$

$$d(\sigma \cdot \delta) \cdot ds + d(\tau \cdot \delta) \cdot dz + P_S \cdot dz \cdot ds = 0 \quad (V.9)$$

όπου :

- $P_S(z,s)$  μία εξωτερική δρώσα δύναμη κατά  $Z$ .

Από την (IV.9) προκύπτει :

$$\frac{\partial(\sigma \cdot \delta)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau \cdot \delta)}{\partial s} + P_S = 0 \quad (V.10)$$

όπου :

- $\sigma \cdot \delta$ , ορθές δυνάμεις ανά μέτρο μήκους  $ds$ ,
- $\tau \cdot \delta$ , διατμητικές δυνάμεις ανά μέτρο μήκους  $ds$ .

Από την (IV.10) προκύπτει :



$$\tau(z,s) = \frac{1}{\delta} \cdot \left[ S_0(z) - \int_0^s P_z \cdot ds - \int_0^s \frac{\partial \sigma}{\partial z} \cdot \delta \cdot ds \right] \quad (V.11)$$

όπου :

$$\bullet S_0(z) = \tau(z,0) \cdot \delta \quad (V.12)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (V.6) που δίνει τις τάσεις  $\sigma(z,s)$  στην σχέση (IV.11) προκύπτει :

$$\tau = \frac{1}{\delta} \cdot \left[ S_0 - \int_0^s P_z \cdot ds - E \cdot \left( \zeta''' \cdot \int_0^s dF - \xi''' \cdot \int_0^s x \cdot dF - n''' \cdot \int_0^s y \cdot dF - \theta''' \cdot \int_0^s D_s \cdot dF \right) \right] \quad (V.13)$$

η ισοδύναμα :

$$\tau = \frac{1}{\delta} \cdot S_0 - \frac{1}{\delta} \cdot \int_0^s P_z \cdot ds - E \cdot \zeta''' \cdot \frac{F(s)}{\delta} + E \cdot \xi''' \cdot \frac{S_y(s)}{\delta} + E \cdot n''' \cdot \frac{S_x(s)}{\delta} + E \cdot \theta''' \cdot \frac{S_s(s)}{\delta} \quad (V.14)$$

όπου :

- $F(s) = \int_0^s dF$ , εμβαδόν,
- $S_x(s) = \int_0^s y dF$ , στατική ροπή κατά x,
- $S_y(s) = \int_0^s x dF$ , στατική ροπή κατά y,
- $S_s(s) = \int_0^s D_s dF$ , στατική ροπή στρέβλωσης (Sectorial Static Moment).

Αν  $P_S(z,s)$  η σχέση (V.13) γίνεται :

$$\tau(z,s) = \frac{E}{\delta(s)} \cdot \left[ -\zeta'''(z) \cdot F(s) + \xi'''(z) \cdot S_y(s) + n'''(z) \cdot S_x(s) + \theta'''(z) \cdot S_s(s) \right] \quad (V.17)$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτουν τα ακόλουθα :

Το σύνολο των εφαπτομενικών τάσεων  $\tau$  το οποίο περιγράφηκε στην παράγραφο V.2 και δίνεται από την σχέση (V.17) προκύπτει από την άθροιση τεσσάρων όρων. Ο πρώτος όρος παριστάνει την δράση στον πυρήνα διατμητικών τάσεων που δρουν στις παράπλευρες επιφάνειες τυχαίας διατομής

(σχήμα 15) και προέρχονται από διαμήκη φόρτιση (ο όρος  $\zeta(z)$  παριστάνει την ομοιόμορφη μετατόπιση ολόκληρης της διατομής κατά τον διαμήκη άξονα  $Z$  του πυρήνα). Οι όροι δεύτερος και τρίτος παριστάνουν τις διατμητικές τάσεις λόγω κάμψης του πυρήνα σε δύο κάθετα μεταξύ τους επίπεδα. Ο τελευταίος όρος παριστάνει τις διατμητικές τάσεις λόγω στρέψης του πυρήνα.

#### V.6. Σύνοψη

Η ανάλυση των παραγράφων III και IV στηρίχτηκε στις δύο βασικές κινηματικές παραδοχές της παραγράφου II.3. Με βάση τις δύο αυτές παραδοχές διευπλώθηκαν οι σχέσεις των μετατοπίσεων  $u$ ,  $v$ ,  $w$  σε φυσικό σύστημα συντεταγμένων (σχέσεις III.16, III.9, III.10).

Από τις παρατηρήσεις της παραγράφου III.5 για την σχέση (III.16) προέκυψε ότι η επιπεδότητα των διατομών παραβιάζεται λόγω του τελευταίου όρου της σχέσης. Με βάση την σχέση αυτή υπολογίστηκαν οι διαμήκεις παραμορφώσεις  $\varepsilon(z,s)$  (σχέση III.18) οι οποίες είναι το άθροισμα τεσσάρων ειδών παραμόρφωσης : της ομοιόμορφης διαμήκουσ, της καμπτικής, λόγω κάμψης σε δύο κάθετα μεταξύ τους επίπεδα και της στρέβλωσης (Warping).

Στην παράγραφο V.2 εντοπίστηκαν οι δύο κατηγορίες τάσεων της διατομής πυρήνα οι ορθές  $\sigma$  και οι διατμητικές  $\tau$ . Οι  $\sigma$  υπολογίστηκαν μέσω της σχέσης (V.6) και σε αυτές βρέθηκε ότι επιδρά κατ' αναλογία με τις  $\varepsilon(z,s)$  και η στρέψη μέσω του τελευταίου όρου της σχέσης (V.6). Οι διατμητικές τάσεις  $\tau$  υπολογίστηκαν μέσω της σχέσης (V.14).

Στην διατομή επίσης δρα και η στρεπτική ροπή  $T_1(z)$  η οποία δίνεται από την σχέση (V.7) και προκύπτει από την μη ομοιόμορφη κατανομή των διατμητικών τάσεων κατά το πάχος της διατομής.

$$\tau = \frac{1}{\delta} \cdot S_0 - \frac{1}{\delta} \cdot \int_0^s P_z \cdot ds - E \cdot \zeta'' \cdot \frac{F(s)}{\delta} + E \cdot \xi''' \cdot \frac{S_y(s)}{\delta} + E \cdot \eta''' \cdot \frac{S_x(s)}{\delta} + E \cdot \theta''' \cdot \frac{S_s(s)}{\delta}$$

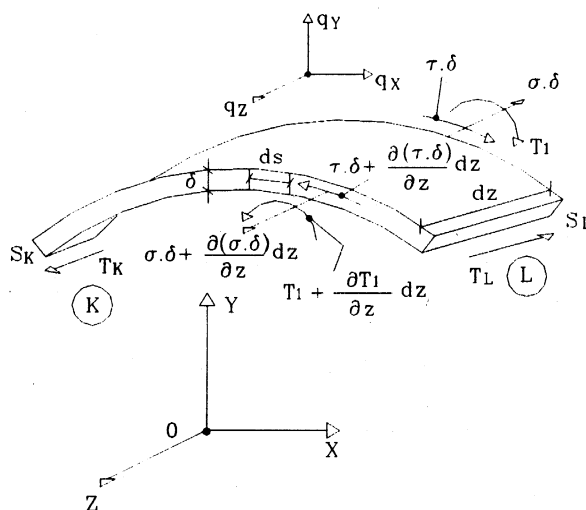
## VI. Διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας στοιχείου πυρήνα σε τυχαίο σύστημα συντεταγμένων

### VI.1. Εισαγωγή

Οι σχέσεις (V.6), (V.7), (V.14) οι οποίες προσδιορίζουν τις τάσεις  $\sigma(z,s)$ ,  $\tau(z,s)$  και την στρεπτική ροπή  $T_1(z)$  περιέχουν άγνωστες συναρτήσεις τις  $\zeta(z)$ ,  $\xi(z)$ ,  $\eta(z)$ ,  $\theta(z)$ . Στην παρούσα παράγραφο οι συναρτήσεις αυτές θα υπολογιστούν με βάση τις εξισώσεις ισορροπίας οι οποίες θα εφαρμοστούν σε ένα στοιχειώδες τμήμα πυρήνα με μήκος  $dz$ .

### VI.2. Εξαγωγή - διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας

Εστω το στοιχειώδες τμήμα το οποίο εικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα 16:



Σχήμα 16. Ισορροπία στοιχειώδους τμήματος  $dz$

το στοιχειώδες αυτό τμήμα προέκυψε από δύο τομές στις θέσεις  $z$ ,  $z+dz$  και επιπλέον άλλες δύο στα σημεία K και L.

Στο στοιχείο αυτό δρουν:

- οι συνιστώσες της εξωτερικής φόρτισης ανά μονάδα μήκους,  $q_x, q_y, q_z$  και ροπής  $m$ ,
- οι ανά μονάδα μήκους γραμμής της διατομής (Profile Line) ορθές τάσεις  $\sigma \cdot \delta$  και  $\sigma \cdot \delta + \frac{\partial(\sigma \cdot \delta)}{\partial z} \cdot dz$ ,
- οι ανά μονάδα μήκους γραμμής της διατομής διατμητικές τάσεις  $\tau \cdot \delta$  και  $\tau \cdot \delta + \frac{\partial(\tau \cdot \delta)}{\partial z} \cdot dz$ ,

- οι ροπές στρέψης λόγω της μη ομοιόμορφης κατανομής των διατμητικών τάσεων  $\tau$ ,  $T_1(z)$  και  $T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial z} \cdot dz$ ,
- οι διατμητικές δυνάμεις ανά μέτρο  $T_K, T_L$  οι οποίες προκύπτουν από τις διαμήκεις τομές στα σημεία K και L και είναι  $T_K = \tau(z, s = s_K) \cdot \delta$ ,  $T_L = \tau(z, s = s_L) \cdot \delta$ .

Με βάση τα ανωτέρω οι εξισώσεις ισορροπίας είναι:

$$\sum F_Z = 0 \Rightarrow \int_{s_K}^{s_L} \frac{\partial(\sigma \cdot \delta)}{\partial z} \cdot dz \cdot ds + (T_L - T_K + q_z) \cdot dz = 0 \quad (\text{VI.1.}\alpha)$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow \int_{s_K}^{s_L} \frac{\partial(\tau \cdot \delta)}{\partial z} \cdot \cos \alpha \cdot dz \cdot ds + q_x \cdot dz = 0 \quad (\text{VI.1.}\beta)$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow \int_{s_K}^{s_L} \frac{\partial(\tau \cdot \delta)}{\partial z} \cdot \sin \alpha \cdot dz \cdot ds + q_y \cdot dz = 0 \quad (\text{VI.1.}\gamma)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{s_K}^{s_L} \frac{\partial(\tau \cdot \delta)}{\partial z} \cdot dz \cdot [(x - \alpha_x) \cdot \sin \alpha - (y - \alpha_y) \cdot \cos \alpha] \cdot ds + \frac{\partial T_1}{\partial z} \cdot dz + m \cdot dz = 0 \quad (\text{VI.1.}\delta)$$

η τελευταία εξίσωση ισορροπίας είναι περί άξονα ο οποίος διέρχεται από ένα τυχαίο σημείο A και είναι παράλληλος με τον άξονα Z.

Η γωνία  $\alpha$  η οποία εισέρχεται στις ανωτέρω σχέσεις είναι η γωνία μεταξύ του άξονα X και της εφαπτομένης στο στοιχειώδες  $ds$  τμήμα. Οι ποσότητες  $\alpha_x, \alpha_y$  είναι οι συντεταγμένες του σημείου A ως προς το σύστημα συντεταγμένων XYZ, το οποίο είναι τυχαία εκλεγμένο.

Με βάση τις σχέσεις (VI.1) αντικαθιστώντας σε αυτές τις σχέσεις (V.6), (V.7), (V.14) προκύπτει:

$$\zeta''' \cdot E \cdot \int_F dF - \xi''' \cdot E \cdot \int_F x \cdot dF - \eta''' \cdot E \cdot \int_F y \cdot dF - \theta''' \cdot E \cdot \int_F Ds \cdot dF + q_z + T_L - T_K = 0 \quad (\text{VI.2.}\alpha)$$

$$\int_{s_K}^{s_L} \frac{\partial P_Z}{\partial z} \cdot x \cdot ds + \zeta''' \cdot E \cdot \int_F x \cdot dF - \xi''' \cdot E \cdot \int_F x^2 \cdot dF - \eta''' \cdot E \cdot \int_F x \cdot y \cdot dF - \theta''' \cdot E \cdot \int_F x \cdot Ds \cdot dF + q_x + T'_L \cdot x_L - T'_K \cdot x_K = 0 \quad (\text{VI.2.}\beta)$$

$$\int_{S_K}^{S_L} \frac{\partial P_Z}{\partial z} \cdot y \cdot ds + \zeta''' \cdot E \cdot \int_F y \cdot dF - \xi''' \cdot \int_F x \cdot y \cdot dF - n''' \cdot E \cdot \int_F y^2 \cdot dF - \theta''' \cdot E \cdot \int_F y \cdot Ds \cdot dF + q_y + T'_L \cdot y_L - T'_K \cdot y_K = 0 \quad (VI.2.\gamma)$$

$$\int_{S_K}^{S_L} \frac{\partial P_Z}{\partial z} \cdot Ds \cdot ds + \zeta''' \cdot E \cdot \int_F Ds \cdot dF - \xi''' \cdot \int_F x \cdot Ds \cdot dF - n''' \cdot E \cdot \int_F y \cdot Ds \cdot dF - \theta''' \cdot E \cdot \int_F Ds^2 \cdot dF + G \cdot J_d \cdot \theta'' + m + T'_L \cdot Ds_L - T'_K \cdot Ds_K = 0 \quad (VI.2.\delta)$$

όπου:

$$\bullet T'_K(z) = \left. \frac{\partial(\tau \cdot \delta)}{\partial z} \right|_{s=S_K},$$

$$\bullet T'_L(z) = \left. \frac{\partial(\tau \cdot \delta)}{\partial z} \right|_{s=S_L},$$

- $dF = \delta \cdot ds$ ,
- $(X_K, Y_K)$ , συντεταγμένες του σημείου K,
- $(X_L, Y_L)$ , συντεταγμένες του σημείου L,
- $Ds_K$ , μέτρο στρέβλωσης (Sectorial Area) του K,
- $Ds_L$ , μέτρο στρέβλωσης (Sectorial Area) του L,

Το σύστημα των σχέσεων (VI.2) είναι ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους:  $\zeta(z)$ ,  $\xi(z)$ ,  $n(z)$ ,  $\theta(z)$ . Το σύστημα αυτό μπορεί να γραφεί με την ακόλουθη μορφή:

$$F \cdot \zeta'' - S_y \cdot \xi''' - S_x \cdot n''' - S_s \cdot \theta''' = -\frac{1}{E} \cdot (q_z + T_L - T_K) \quad (VI.3.\alpha)$$

$$-S_y \cdot \zeta''' + J_y \cdot \xi^{IV} + J_{xy} \cdot n^{IV} + J_{Dx} \cdot \theta^{IV} = \frac{1}{E} \cdot \left( q_x + T'_L \cdot X_L - T'_L \cdot X_L + \int_{S_K}^{S_L} x \cdot \frac{\partial P_Z}{\partial z} ds \right) \quad (VI.3.\beta)$$

$$-S_x \cdot \zeta''' + J_{xy} \cdot \xi^{IV} + J_x \cdot n^{IV} + J_{Dy} \cdot \theta^{IV} = \frac{1}{E} \cdot \left( q_y + T'_L \cdot Y_L - T'_L \cdot Y_L + \int_{S_K}^{S_L} y \cdot \frac{\partial P_Z}{\partial z} ds \right) \quad (VI.3.\gamma)$$

$$-S_s \cdot \zeta''' + J_{Dx} \cdot \xi^{IV} + J_{Dx} \cdot n^{IV} + K \cdot \theta^{IV} - \frac{G \cdot J_d}{E} \cdot \theta = \frac{1}{E} \cdot \left( m + T'_L \cdot Ds_L - T'_L \cdot Ds_L + \int_{S_K}^{S_L} Ds \cdot \frac{\partial P_Z}{\partial z} \cdot ds \right) \quad (VI.3.\delta)$$

όπου:

- $S_x = \int_F y \cdot dF$ , στατική ροπή κατά X,
- $S_y = \int_F x \cdot dF$ , στατική ροπή κατά Y,
- $J_x = \int_F y^2 \cdot dF$ , ροπή αδρανείας κατά X,
- $J_y = \int_F x^2 \cdot dF$ , ροπή αδρανείας κατά Y.
- $J_{xy} = \int_F x \cdot y \cdot dF$ , γινόμενο αδρανείας,
- $S_s = \int_F Ds \cdot dF$ , στατική ροπή στρέβλωσης,
- $K = \int_F Ds^2 \cdot dF$ , αντίσταση στρέβλωσης,
- $J_{Dx} = \int_F Ds \cdot x \cdot dF$ , ροπή στρέβλωσης κατά X,
- $J_{Dy} = \int_F Ds \cdot y \cdot dF$ , ροπή στρέβλωσης κατά Y.

## VII Διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας στοιχείου πυρήνα σε κύριο σύστημα αξόνων

### VII.1. Εισαγωγή

Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (VI.3) είναι πολύπλοκο και δύσχρηστο. Το γεγονός αυτό ωφείλεται σε τρεις παράγοντες: την αυθαίρετη εκλογή του συστήματος συντεταγμένων XYZ, του πόλου A, και του ορίσματος (Sectorial Origin)  $M_1$ .

### VII.2. Διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας

Αν στο σύστημα των εξισώσεων (VI.3) τεθούν:

$$S_y = S_x = J_{xy} = S_s = J_{Dx} = J_{Dy} = 0 \quad (\text{VII.1})$$

η ισοδύναμα εκλεγούν οι συναρτήσεις  $1, x(s), y(s), M_1$  τέτοιες ώστε να είναι ορθογώνιες μεταξύ τους τότε το σύστημα απλοποιείται ως εξής:

$$E \cdot F \cdot \zeta''' = -(q_z + T_L - T_K) \quad (\text{VII.2.}\alpha)$$

$$E \cdot J_y \cdot \xi^{IV} = q_x + T'_L \cdot X_L - T'_K \cdot X_K + \int_{S_K}^{S_L} x \cdot \frac{\partial P_z}{\partial z} \cdot dz \quad (\text{VII.2.}\beta)$$

$$E \cdot J_x \cdot \eta^{IV} = q_y + T'_L \cdot Y_L - T'_K \cdot Y_K + \int_{S_K}^{S_L} y \cdot \frac{\partial P_z}{\partial z} \cdot dz \quad (\text{VII.2.}\gamma)$$

$$E \cdot K \cdot \theta^{IV} - G \cdot J_d \cdot \theta'' = m + T'_L \cdot Ds_L - T'_K \cdot Ds_K + \int_{S_K}^{S_L} Ds \cdot \frac{\partial P_z}{\partial z} \cdot dz \quad (\text{VII.2.}\delta)$$

αν  $T_L = T_K = q_z = 0$  η οποία είναι μία συνήθης περίπτωση φόρτισης στην πράξη τότε το ανωτέρω σύστημα απλοποιείται επιπλέον και γίνεται:

$$E \cdot F \cdot \zeta'' = 0 \quad (\text{VII.3.}\alpha)$$

$$E \cdot J_y \cdot \xi^{IV} = q_x \quad (\text{VII.3.}\beta)$$

$$E \cdot J_x \cdot \eta^{IV} = q_y \quad (\text{VII.3.}\gamma)$$

$$E \cdot J_y \cdot \theta^{IV} - G \cdot J_d \cdot \theta'' = m \quad (\text{VII.3.}\delta)$$

η πρώτη εξίσωση των (VII.3) δίνει τις μετατοπίσεις κατά τον άξονα Z, λόγω διαμήκους καταπόνησης η οποία εφαρμόζεται στα άκρα του πυρήνα και

διαδίδεται ομοιόμορφα καθ' όλο το μήκος του  $L$ . Η δεύτερη εξίσωση δίνει τις μετατοπίσεις του πόλου  $A$  λόγω κάμψης στο επίπεδο  $XOZ$  και η τρίτη λόγω κάμψης στο επίπεδο  $YOZ$ . Ο πόλος  $A$  είναι τέτοιος ώστε η συνάρτηση  $D_s$  να είναι ορθογωνική με τις συναρτήσεις  $1, x(s), y(s)$ , ώστε να ισχύουν οι σχέσεις (VII.3). Τέλος, η τέταρτη εξίσωση δίνει την στροφή της διατομής λόγω εγκάρσιας φόρτισης η οποία προκαλεί στρεπτική ροπή  $m(z)$  ως προς τον πόλο  $A$ .

Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (VII.3) είναι απλούστερο από το αρχικό (VI.3) αλλά προϋποθέτει την κατάλληλη επιλογή των σημείων  $0$  (αρχή  $XYZ$ ),  $A$  και  $M_1$ . Τα σημεία αυτά μπορούν να υπολογιστούν από τις σχέσεις (VII.1) ως εξής:

- Από τις σχέσεις  $S_x = S_y = J_{xy} = 0$  υπολογίζεται το κύριο σύστημα αξόνων της διατομής το οποίο θα αντικαταστήσει το μέχρι τώρα χρησιμοποιούμενο τυχαίο.

- Από τις σχέσεις  $J_{Dx} = J_{Dy} = 0$  υπολογίζεται η θέση του πόλου  $A$  και

- Από την σχέση  $S_s = 0$  υπολογίζεται η θέση του σημείου  $M_1$ .

### VII.3. Υπολογισμός των κύριων ιδιοτήτων της διατομής

Ο υπολογισμός του κύριου συστήματος αξόνων της διατομής γίνεται με βάση τις γνωστές μεθόδους της κλασσικής μηχανικής και δεν θα αναλυθεί. Ο υπολογισμός της θέσης του πόλου  $A$  ως προς το κύριο κεντροβαρικό σύστημα συντεταγμένων  $XYZ$  γίνεται με βάση τις σχέσεις:

$$J_{Dx} = J_{Dy} = 0 \quad (VII.4)$$

και είναι:

$$\alpha_x = \frac{1}{J_x} \cdot \int_F Ds_0 \cdot y \cdot dF \quad (VII.4.a)$$

$$\alpha_y = -\frac{1}{J_y} \cdot \int_F Ds_0 \cdot x \cdot dF \quad (VII.4.b)$$

όπου:

- $Ds_0$  είναι το μέτρο στρέβλωσης (Sectorial Area) με πόλο το κέντρο βάρους της διατομής και όρισμα τυχαίο σημείο. (αποδεικνύεται ότι οι συντεταγμένες  $\alpha_x, \alpha_y$  δεν εξαρτώνται από το όρισμα του)  $Ds_0$

Το σημείο  $A$  ονομάζεται *κύριος πόλος των τομεακών ιδιοτήτων* (Principal Sectorial Pole) ή απλά *κύριος πόλος* (Principal pole). Η θέση του κύριου πόλου διατομής εξαρτάται μόνο από τις διαστάσεις της. Σε διατομές με ένα άξονα



συμμετρίας ο κύριος πόλος ανήκει στον άξονα αυτόν. Σε διατομές με δύο άξονες συμμετρίας ο κύριος πόλος βρίσκεται στην τόμη των αξόνων και συμπίπτει με το κέντρο βάρους της διατομής.

Η θέση του ορίσματος προκύπτει από την σχέση:

$$D(t) = \frac{1}{F} \cdot \int_F D_{SA}(S_0, S) \cdot dF \quad (\text{VII.6})$$

η οποία υπολογίζεται με άγνωστη την απόσταση  $t$  ανάμεσα σε ένα τυχαίο τομεακό όρισμα  $S_0$  και το όρισμα  $M_1$  για το οποίο  $S_s = 0$ . Πόλος στην υπό ολοκλήρωση ποσότητα της σχέσης (VII.6) είναι το σημείο με συντεταγμένες αυτές της σχέσης (VII.5). Το σημείο  $M_1$  ονομάζεται *μηδενικό σημείο* (Sectorial Zero point).

## VIII Εντατικά μεγέθη επί της διατομής πυρήνα

### VIII.1. Εισαγωγή

Οι σχέσεις (VII.2) και (VII.3) ανάλογα με το αν  $q_z, T_L, T_K \neq 0$  ή  $q_z, T_L, T_K = 0$  αντίστοιχα, προσδιορίζουν τις συναρτήσεις  $\zeta(z), \xi(z), \eta(z)$ , και  $\theta(z)$ . Με τις συναρτήσεις αυτές γνωστές υπολογίζονται τα μεγέθη  $\sigma(z,s), \tau(z,s)$  και  $H_k(z)$  από τις σχέσεις (V.6), (V.7), (V.14).

### VIII.2. Αξονικές τάσεις $\sigma(z,s)$

Η σχέση (V.6) η οποία δίνει τις αξονικές τάσεις  $\sigma(z,s)$  είναι:

$$\sigma(z,s) = E \cdot (\zeta'(z) - \xi''(z) \cdot x(s) - \eta''(z) \cdot y(s) - \theta''(z) \cdot Ds) \quad (\text{VIII.1})$$

Με βάση την αρχή των δυνατών έργων υπολογίζεται το έργο που παράγουν οι δυνάμεις  $\sigma dF$  κατά την μετατόπιση  $u(z,s)$  (σχέση III.16) από όπου προκύπτουν:

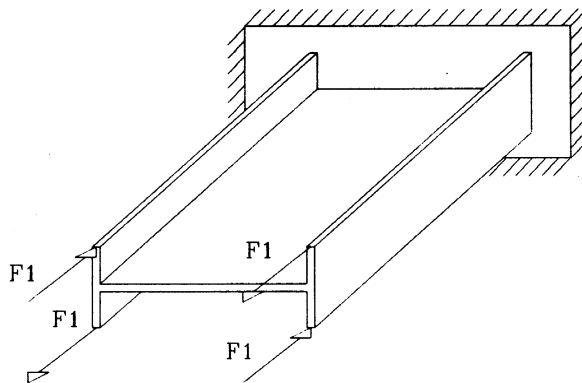
$$N = \int_F \sigma \cdot 1 \cdot dF \quad (\text{VIII.2.α})$$

$$M_x = \int_F \sigma \cdot y \cdot dF \quad (\text{VIII.2.β})$$

$$M_y = - \int_F \sigma \cdot x \cdot dF \quad (\text{VIII.2.γ})$$

$$B = \int_F \sigma \cdot Ds \cdot dF \quad (\text{VIII.2.δ})$$

η σχέση (VIII.2.δ) δίνει την τιμή της *διρροπής* (Bimoment)  $B$  ( $N \cdot m^2$ ). Το χαρακτηριστικό του μεγέθους αυτού είναι ότι παράγεται από ένα σύστημα δυνάμεων στατικά ίσο με μηδέν, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα 17:



Σχήμα 17. Φόρτιση η οποία προκαλεί διρροπή

Η διατομή του σχήματος 17 κατά την κλασική θεωρία δεν αναπτύσσει στατικά μεγέθη, κατά την θεωρία του Vlasov όμως η φόρτιση αυτή καμπυλώνει την διατομή και παράγει το στατικό μέγεθος το οποίο ονομάζεται διρροπή (Bimoment) B.

Αντικαθιστώντας την σχέση (VIII.1) στις (VIII.2) για το κύριο σύστημα συντεταγμένων της διατομής (στο οποίο οι συναρτήσεις  $1, x, y, D_s$  είναι ορθογωνικές προκύπτει:

$$N = E \cdot F \cdot \zeta' \quad (\text{VIII.3.}\alpha)$$

$$M_y = E \cdot J_y \cdot \xi'' \quad (\text{VIII.3.}\beta)$$

$$M_x = -E \cdot J_x \cdot \eta'' \quad (\text{VIII.3.}\gamma)$$

$$B = -E \cdot K \cdot \theta'' \quad (\text{VIII.3.}\delta)$$

Επιλύοντας τις (VIII.3) ως προς  $\zeta', \xi'', \eta'', \theta''$  και αντικαθιστώντας τα μεγέθη αυτά στην σχέση (VIII.1) προκύπτει:

$$\sigma = \frac{N}{F} - \frac{M_y}{J_y} \cdot x + \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{B}{K} \cdot D_s \quad (\text{VIII.4})$$

Η τελευταία σχέση εκφράζει τις διαμήκειες τάσεις  $\sigma(z,s)$  διατομής πυρήνα συναρτήσει των εντατικών μεγεθών  $M_y(z), M_x(z), B(z)$  και των συντεταγμένων  $1, x(s), y(s), D_s$ . Οι τρεις πρώτοι όροι της σχέσης (VIII.4) είναι γνωστοί από την κλασική μηχανική και βασίζονται στην επιπεδότητα των διατομών. Ο πρώτος από αυτούς δίνει τις τάσεις  $\sigma$  λόγω αξονικής δύναμης  $N$  και οι υπόλοιποι δύο λόγω καμπτικών ροπών  $M_x, M_y$  στα επίπεδα  $YOZ$  και  $XOZ$  αντίστοιχα. Ο τέταρτος όρος δίνει τις τάσεις  $\sigma$  οι οποίες αναπτύσσονται στην διατομή όταν αυτή δεν παραμένει επίπεδη αλλά καμπυλώνεται λόγω στρέψης.

### VIII.3. Εφαπτομενικές τάσεις $\tau(z,s)$

Οι εφαπτομενικές τάσεις  $\tau(z,s)$  με σταθερή τιμή κατά το ύψος της διατομής και η στρεπτική ροπή  $H_k(z)$  δίνονται από τις σχέσεις:

$$\tau(z,s) = E \cdot \left[ \xi''' \cdot \frac{S_y}{\delta} + \eta''' \cdot \frac{S_x}{\delta} + \theta''' \cdot \frac{S_s}{\delta} \right] \quad (\text{VIII.5.}\alpha)$$

$$T_l = G \cdot J_d \cdot \theta' \quad (\text{VIII.5.}\beta)$$

Ανάλογα με τις σχέσεις (VIII.2) προκύπτουν και οι σχέσεις:

$$Q_x = \int_F (\tau \cdot \delta) \cdot dx \quad (\text{VIII.6.}\alpha)$$

$$Q_x = \int_F (\tau \cdot \delta) \cdot dx \quad (\text{VIII.6.}\alpha)$$

$$Q_y = \int_F (\tau \cdot \delta) \cdot dy \quad (\text{VIII.6.}\beta)$$

$$T_2 = \int_F (\tau \cdot \delta) \cdot dDs = \int_F (\tau \cdot \delta) \cdot h \cdot dx \quad (\text{VIII.6.}\gamma)$$

και από αυτές αντικαθιστώντας τις  $\tau(z,s)$  και λαμβάνοντας υπ' όψη την ορθογωνικότητα των  $1, x, y, Ds$  προκύπτουν οι σχέσεις:

$$Q_x = -E \cdot J_y \cdot \xi''' \quad (\text{VIII.7.}\alpha)$$

$$Q_y = -E \cdot J_x \cdot \eta''' \quad (\text{VIII.7.}\beta)$$

$$T_2 = -E \cdot K \cdot \theta''' \quad (\text{VIII.7.}\gamma)$$

όπου:

- $Q_x, Q_y$  οι τέμνουσες δυνάμεις κατά  $x$  και  $y$ , συναρτήσεις των παραγώγων των μετατοπίσεων  $\xi$  και  $\eta$  της γραμμής των κύριων πόλων (Principal Poles)  $A$  (με συντεταγμένες από τις σχέσεις VII.5),
- $T_2$  η στρεπτική ροπή γύρω από τον κύριο πόλο  $A$  της διατομής, λόγω των διατμητικών δυνάμεων  $\tau \cdot \delta$  (οι οποίες δρουν κατά την εφαπτομένη της γραμμής της διατομής Profile Line).

Επιλύοντας τις σχέσεις (VIII.7) ως προς  $\xi''', \eta''', \theta'''$  και αντικαθιστώντας στην σχέση (VIII.5.a) προκύπτει:

$$\tau = -\frac{1}{\delta} \cdot \left[ \frac{Q_x}{J_y} \cdot S_y + \frac{Q_y}{J_x} \cdot S_x + \frac{T_2}{K} \cdot S_s \right] \quad (\text{VIII.8})$$

και από τις σχέσεις (VIII.3) και (VIII.7) προκύπτει:

$$Q_x = -M'_y \quad (\text{VIII.9.}\alpha)$$

$$Q_y = M'_x \quad (\text{VIII.9.}\beta)$$

$$T_2 = B' \quad (\text{VIII.9.}\gamma)$$

Η σχέση (VIII.8) προέκυψε με βάση την υπόθεση ότι στον πυρήνα δρουν μόνο εγκάρσιες φορτίσεις.

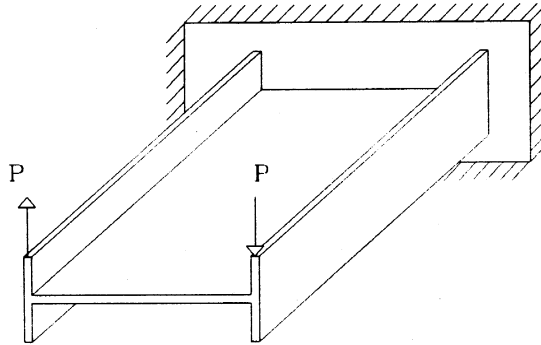
Στην περίπτωση κατά την οποία δρουν στον πυρήνα και διαμήκειες φορτίσεις τότε η (VIII.8) αντικαθίσταται από την σχέση:

$$\tau = \frac{1}{\delta} \cdot \left[ T_K + (T_L - T_L) \frac{F(s)}{F} - \frac{Q_x}{J_y} \cdot S_y - \frac{Q_y}{J_x} \cdot S_x - \frac{T_2}{K} \cdot S_s \right] \quad (\text{VIII.10})$$

όπου  $T_L, T_K$  διατμητικές δυνάμεις κατά διαμήκεις τομές (σχήμα 16).

#### VIII.4. Στρέψη

Η σχέση (VIII.5.β) δίνει την στρεπτική ροπή λόγω ανομοιόμορφης κατανομής των εφαπτομενικών διατμητικών τάσεων  $\tau$  καθ' ύψος της διατομής. Η σχέση (VIII.7.γ) δίνει την τιμή της ροπής η οποία εκτός της στρέψης προκαλεί και κάμψη σε διαφορετικά διαμήκη τμήματα του πυρήνα όπως φαίνεται στο σχήμα 18.



Σχήμα 18. Στρεπτοκαμπτική καταπόνηση

Το άθροισμα των  $T_1, T_2$  δίνει την συνολική ροπή της διατομής T:

$$T = T_1 + T_2 = G \cdot J_d \cdot \theta' - E \cdot K \cdot \theta'' \quad (\text{VIII.11})$$

#### VIII.5. Σύνοψη παραγράφων VI - VIII

Στην παράγραφο VI διευτυπώθηκε ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων το οποίο προέκυψε από τις εξισώσεις ισορροπίας σε τυχαίο σύστημα συντεταγμένων XYZ. Από το σύστημα αυτό μπορούν να υπολογιστούν οι συναρτήσεις  $\zeta(z), \xi(z), \eta(z)$  και  $\theta(z)$ . Το ίδιο αυτό σύστημα εκφρασμένο ως προς: κύριο κεντροβαρικό σύστημα XYZ με πόλο A τέτοιο ώστε η συνάρτηση  $D_S$  να είναι ορθογώνια με τις  $1, x(s), y(s)$ , συντεταγμένες του πόλου A αυτές των σχέσεων (VII.5), και όρισμα ευρισκόμενο από την σχέση (VII.6), ή ισοδύναμα σε σύστημα συντεταγμένων τέτοιο ώστε να ισχύουν οι σχέσεις (VII.1), μετασχηματίζεται σε μία από τις μορφές των σχέσεων (VII.2) ή (VII.3) ανάλογα με την ύπαρξη ή όχι διαμήκους φόρτισης. Με γνωστές τις συναρτήσεις  $\zeta(z), \xi(z), \eta(z), \theta(z)$  οι  $\sigma(z,s), \tau(z,s)$  και  $T_1(z)$  μπορούν να υπολογιστούν από τις σχέσεις (V.6), (V.14) και (V.7).

Σε κύριο σύστημα συντεταγμένων XYZ και με κύριό πόλο προέκυψαν οι σχέσεις (VIII.4) για την  $\sigma(z,s)$  και (VIII.8) ή (VIII.10) (ανάλογα με το εάν

υφίσταται ή όχι διαμήκης φόρτιση) για την  $\tau(z,s)$ . Επιπλέον βρέθηκε ότι η συνολική στρεπτική ροπή της διατομής δίνεται από την σχέση (VIII.11).

Σε κύριο σύστημα συντεταγμένων τα μεγέθη  $N$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $B$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$  δίνονται από τις σχέσεις (VIII.3) και (VIII.7), και η σχέση μεταξύ των  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $B$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$  και  $T_2$  από τις σχέσεις (VIII.9), όπου  $T_2$  ροπή η οποία εκτός της στρέψης προκαλεί και καμπτική καταπόνηση σε διαφορετικά διαμήκη τμήματα του πυρήνα.

## IX. Το κέντρο διάτμησης

### IX.1. Γενική περιγραφή ιδιότητες

Η γραμμή η οποία είναι παράλληλη στις γεννέτηρες ενός πυρήνα και έχει την ιδιότητα ότι κάθε εγκάρσια φόρτιση (και οι αντιδράσεις της) η οποία διέρχεται από αυτήν προκαλεί καθαρή κάμψη στον πυρήνα, ονομάζεται γραμμή των κέντρων διάτμησης. Η έκφραση καθαρή κάμψη σημαίνει ότι οι διατομές του πυρήνα μετατοπίζονται μόνο χωρίς να στρεβλώνονται και ο πυρήνας καταπονείται μόνο σε κάμψη. Στην αντίθετη περίπτωση στον πυρήνα θα εμφανιστεί και στρέψη και μαζί με αυτήν επιπλέον τάσεις στην διατομή οι οποίες υπολογίζονται με βάση τις τομεακές ιδιότητες της διατομής.

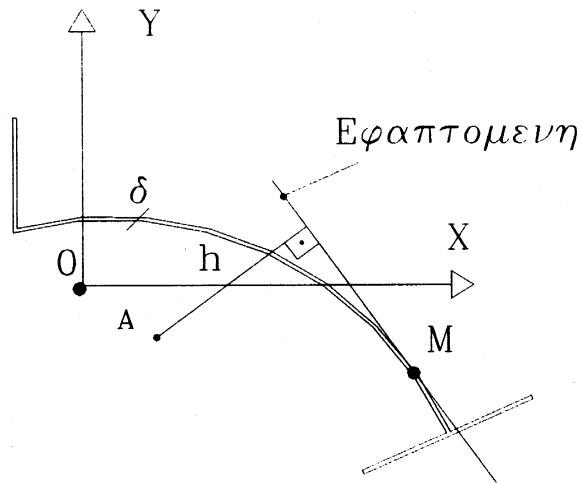
### Πρόταση

Ο κύριος πόλος  $A$  (*Principal Pole*) μίας διατομής ανήκει στην γραμμή των κέντρων διάτμησης και καλείται κέντρο διάτμησης της υπ' όψιν διατομής.

Η ανωτέρω πρόταση αποδεικνύεται ως εξής:  
στην σχέση (VIII.8):

$$\tau = -\frac{1}{\delta} \cdot \left[ \frac{Q_x}{J_y} \cdot S_y + \frac{Q_y}{J_x} \cdot S_x + \frac{T_2}{K} \cdot S_s \right] \quad (\text{IX.1})$$

οι δύο πρώτοι όροι παριστάνουν διατμητικές τάσεις οι οποίες ωφείλονται σε κάμψη του πυρήνα λόγω φόρτισης η οποία διέρχεται από τον κύριο πόλο  $A$  της διατομής, και δεν προκαλούν στρεπτική ροπή, όπως αποδεικνύεται λαμβάνοντας τις ροπές των τάσεων των δύο πρώτων όρων της σχέσης (IX.1) ως προς τον πόλο  $A$ :



Σχήμα 19. Κέντρο Διάτμησης

$$\int_F \tau \cdot \delta \cdot h \cdot ds = \int_F \tau \cdot \delta \cdot dDs = -\frac{Q_x}{J_y} \cdot \int_F S_y \cdot dDs - \frac{Q_y}{J_x} \cdot \int_F S_x \cdot dDs = 0$$

όπου  $\int_F S_x \cdot dDs = \int_F S_y \cdot dDs = 0$ , όπως αποδεικνύεται με παραγοντική ολοκλήρωση.

Ο τρίτος όρος της σχέσης (IX.1) παριστάνει διατμητικές τάσεις οι οποίες ωφείλονται σε συνδυασμό στρεπτικής και καμπτικής καταπόνησης του πυρήνα, λόγω φόρτισης η οποία δεν διέρχεται από τον πόλο A, και προκαλούν στρεπτική ροπή  $T_2$  ως προς αυτόν:

$$T_2 = \int_F \tau \cdot \delta \cdot h \cdot ds = \int_F \tau \cdot \delta \cdot dDs = -\frac{T_2}{K} \cdot \int_F S_s \cdot dDs$$

Από τα ανωτέρω προκύπτει ότι, όταν  $T_2=0$  η εξωτερικά επιβαλλόμενη φόρτιση διέρχεται από την γραμμή των κύριων πόλων στον πυρήνα εμφανίζεται μόνο καμπτική καταπόνηση. Αυτό όμως σημαίνει ότι η γραμμή των κύριων πόλων είναι η γραμμή των κέντρων διάτμησης σύμφωνα με τα αναφερόμενα στην αρχή της παραγράφου, οπότε αποδεικνύεται η αλήθεια της πρότασης.



## X. Μηχανικά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά πυρήνων ανοικτής διατομής

Για τον καθορισμό του μητρώου ακαμψίας του κατακόρυφου χωρικού στοιχείου πυρήνα ανοικτής διατομής με βάση τη θεωρία των λεπτότοιχων ανοικτών διατομών Vlassov, και τις δημοσιεύσεις W. Weaver και G.E. Brandow και Δ. Μπαϊρακτάρη, απαιτείται ο καθορισμός των μηχανικών και γεωμετρικών ιδιοτήτων της λεπτότοιχης διατομής.

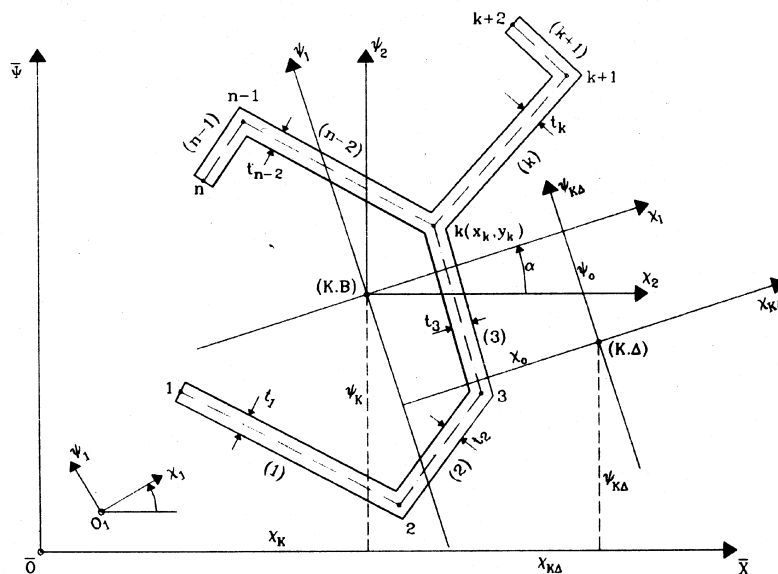
Τα βασικά προβλήματα για τον καθορισμό των πιο πάνω ιδιοτήτων είναι η εύρεση του συστήματος των κυρίων αξόνων του πυρήνα και η εύρεση των συντεταγμένων του κέντρου διάτμησης.

Στην συνέχεια θα μας απασχολήσουν πυρήνες που μορφώνονται με μέση γραμμή που αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα (Σχήμα 20). Η γεωμετρική αυτή απλοποίηση ανάγει τα επικαμπύλια ολοκληρώματα σε αθροίσματα και έτσι διευκολύνεται η μεταφορά των σχέσεων στον H/Y.

Ο πυρήνας ανοικτής διατομής προσδιορίζεται απόλυτα ως προς το βοηθητικό σύστημα αναφοράς του, από τις συντεταγμένες των κόμβων του, τη συνδεσμολογία και το πάχος των μελών του.

Η αρχή γίνεται με τον ορισμό ενός τυχαίου κόμβου  $O_1$  (Σχήμα 20) ως αρχής του τοπικού δεξιόστροφου συστήματος αξόνων  $(X \ O \ Y)$ . Κατόπιν, διατρέχοντας τον πυρήνα αντισωρολογιακά, ξεκινώντας από το πρώτο σημείο ορίζουμε τις συντεταγμένες των υπολοίπων κόμβων της διατομής του.

Στη συνέχεια ανάγουμε τις συντεταγμένες των κόμβων στο καθολικό σύστημα της κατασκευής  $(X \ O \ Y)$  και υπολογίζουμε :



Σχήμα 20. Χαρακτηριστικά πυρήνα ανοικτής διατομής

- $t_i$  : Πάχος κάθε μέλους (i) της διατομής του πυρήνα.  
 $S_i$  : Μήκος κάθε μέλους (i) της διατομής του πυρήνα.  
 $n$  : Σύνολο κόμβων της διατομής του πυρήνα.  
 $k$  : Τυχαίος κόμβος της διατομής του πυρήνα.

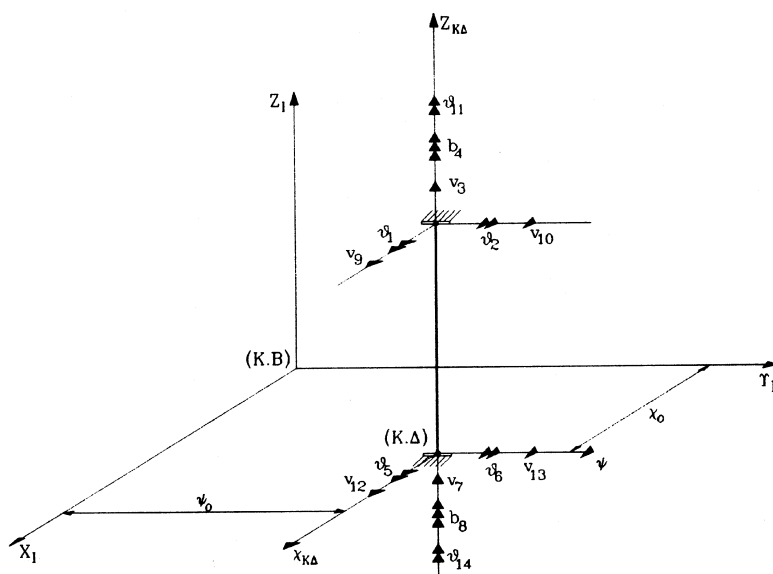
Συστήματα συντεταγμένων :

- $(\bar{X} \ 0 \ \bar{Y})$  : Καθολικό σύστημα της κατασκευής.  
 $(\bar{X}_{KB} \ \bar{0}' \ \bar{Y}_{KB})$  : Ανάλογο του καθολικού συστήματος που εφαρμόζεται στο κέντρο βάρους της διατομής του πυρήνα (K.B).  
 $(X_I \ O' \ Y_I)$  : Σύστημα κυρίων αξόνων του πυρήνα.  
 $(X_{SP} \ O \ Y_{SP})$  : Τοπικό βοηθητικό σύστημα του πυρήνα.
- α) Τις συντεταγμένες του κέντρου βάρους της λεπτότοιχης διατομής  $(X_{KB}, Y_{KB})$  στο καθολικό σύστημα της κατασκευής (Σχήμα 20).  
β) Τη γωνία  $\alpha$  κατά την οποία θα στραφεί το κεντροβαρικό καθολικό σύστημα, για να συμπέσει με το σύστημα των κυρίων αξόνων  $(X_I \ O \ Y_I)$  του πυρήνα (Σχήμα 20).  
γ) Τις κυρίες ροπές αδράνειας  $I_{X_I}$  και  $I_{Y_I}$ .  
δ) Τις αποστάσεις  $X_0$  και  $Y_0$  μεταξύ του κέντρου βάρους και του κέντρου διάτμησης, στο σύστημα των κυρίων αξόνων του πυρήνα, (Σχήμα 20).  
ε) Τις συντεταγμένες του κέντρου διάτμησης  $(X_{K\Delta}, Y_{K\Delta})$  στο καθολικό σύστημα της κατασκευής (Σχήμα 20).  
στ) Τη χαρακτηριστική ποσότητα C

Ο υπολογισμός των πιο πάνω μεγεθών παρουσιάζεται στο Παράρτημα.

### **X.1. Τοπικό μητρώο ακαμψίας πυρήνα ανοικτής διατομής.**

Με βάση τα στοιχεία από τη θεωρία των λεπτότοιχων διατομών είμαστε σε θέση να μορφώσουμε το τοπικό μητρώο ακαμψίας για το κύριο σύστημα συντεταγμένων που περνά από το κέντρο διάτμησης του πυρήνα. Οι βαθμοί ελευθερίας του πυρήνα ανοικτής διατομής στο σύστημα που αναφέραμε πιο πάνω είναι δεκατέσσερις (Σχήμα 21). Ο 4ος και ο 8ος β.ε, όπως ορίζονται στη θεωρία λεπτότοιχων διατομών, είναι η καθ' ύψος μεταβολή του στρεπτικού βαθμού ελευθερίας γνωστή και ως συστροφή και συνδέονται ενεργειακά με το εντατικό μέγεθος της διρροπής η ροπής στρέβλωσης.



Σχήμα 21. Βαθμοί ελευθερίας πυρήνα ανοικτής διατομής

Από τους 14 παραπάνω β.ε. οι  $\theta_1, \theta_2, v_3, \theta_5, \theta_6, v_7, v_9, v_{10}, v_{12}, v_{13}$  καθορίζουν συντελεστές ακαμψίας ίδιους με αυτούς που ισχύουν για το χωρικό στοιχείο πρισματικής δοκού. Η μόνη διαφορά είναι ότι οι β.ε έχουν μεταφερθεί από το κέντρο βάρους που αποτελεί το σημείο αναφοράς για τις πρισματικές δοκούς στο κέντρο διάτμησης της διατομής. Αυτό συμβαίνει διότι οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν τη συμπεριφορά των λεπτότοιχων διατομών και σχετίζονται με τους παραπάνω β.ε. είναι οι παρακάτω :

$$\alpha) E \cdot A \cdot \frac{d^2 w}{dz^2} = 0$$

$$\beta) E \cdot I_y \cdot \frac{d^4 u}{dz^4} = 0$$

$$\gamma) E \cdot I_x \cdot \frac{d^4 u}{dz^4} = 0$$

όπου  $u, v, w$  είναι οι μετατοπίσεις κατά τους άξονες  $X, Y, Z$ .

Οι εξισώσεις αυτές συμπίπτουν με τις αντίστοιχες εξισώσεις για τις πρισματικές δοκούς.

Οι βαθμοί ελευθερίας  $\theta_{11}$  και  $\theta_{14}$  που υπάρχουν και για το χωρικό στοιχείο δοκού μαζί με τους προσθετούς δυο β.ε. της θεωρίας λεπτότοιχων διατομών  $b_4$  και  $b_8$  καθορίζουν τροποποιημένους και καινούριους συντελεστές ακαμψίας. Η συμπεριφορά της λεπτότοιχης διατομής σε σχέση με τους 4 παραπάνω β.ε. προσδιορίζεται από τη διαφορική εξίσωση :

$$\delta) E \cdot K \cdot \frac{d^4 \theta}{dz^4} - G \cdot J \cdot \frac{d^2 \theta}{dz^2} = 0$$

Με βάση τα παραπάνω, καθορίζοντας κατάλληλες συνοριακές συνθήκες και χρησιμοποιώντας τον ορισμό του συντελεστή ακαμψίας που προσδιορίζει τα απαιτούμενα εντατικά μεγέθη για την ανάπτυξη μοναδιαίας μετακίνησης ενώ όλες οι άλλες μετακινήσεις είναι μηδέν, παίρνουμε από τη διαφορική εξίσωση τους διάφορους συντελεστές ακαμψίας.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι σχέσεις από τις οποίες προκύπτουν τα στοιχεία της 11ης στήλης του μητρώου ακαμψίας του πυρήνα ανοικτής διατομής. Αν θεωρηθεί μια μοναδιαία στροφή  $\theta_{11}$  στο άκρο  $j$  του πυρήνα (β.ε. 11), ενώ όλοι οι άλλοι βαθμοί ελευθερίας είναι δεσμευμένοι, καθορίζονται οι συντελεστές ακαμψίας της 11ης στήλης που εκφράζουν τη στρεπτική ροπή και τη διρροπή στα άκρα του πυρήνα. Επιβάλλονται δηλαδή στο πρόβλημα συνοριακών τιμών οι εξής συνοριακές συνθήκες :

- (i)  $\theta_{z=0} = 0$
- (ii)  $\theta'_{z=0} = 0$
- (iii)  $\theta_{z=L} = 1$
- (iv)  $\theta'_{z=L} = 0$

Η λύση της εξίσωσης (δ) όπως αναφέρθηκε είναι:

$$\theta(z) = C_1 + C_2 \cdot \cosh(C \cdot z) + C_3 \cdot \sinh(C \cdot z) + \frac{T \cdot z}{G \cdot J} \quad (X.1.1)$$

Από την εξίσωση (X.1.1) παραγωγίζοντας ως προς  $z$  έχουμε:

$$\theta(z)' = C \cdot C_2 \cdot \sinh(C \cdot z) + C \cdot C_3 \cdot \cosh(C \cdot z) + \frac{T}{G \cdot J} \quad (X.1.2)$$

$$\theta(z)'' = C^2 \cdot C_2 \cdot \cosh(C \cdot z) + C^2 \cdot C_3 \cdot \sinh(C \cdot z) \quad (X.1.3)$$

Ετσι στις (X.1.1) και (X.1.2) εφαρμόζοντας αντίστοιχα τις συνοριακές συνθήκες (i) και (ii) έχουμε:

$$C_1 = -C_2 \quad C_3 = -\frac{T}{C \cdot G \cdot J}$$

Γνωρίζοντας ότι  $B_{Z=L} = E \cdot K \cdot \phi''_{Z=L}(z)$  έχουμε:

$$C_2 = \frac{B_{Z=L}}{G \cdot J} + \frac{T}{C \cdot G \cdot J} \cdot \sinh(C \cdot L) \cdot \frac{1}{\cosh(C \cdot L)} \quad (X.1.4)$$

Από τη συνοριακή συνθήκη (iv) προκύπτει επίσης το  $C_2$  ως :

$$C_2 = \frac{(\cosh(C \cdot L) - 1) \cdot T}{C \cdot \sinh(C \cdot L) \cdot G \cdot J} \quad (X.1.5)$$

Συνδυάζοντας τις (X.1.4) και (X.1.5) και γνωρίζοντας ότι:

$$\frac{\sinh(C^2 \cdot L)}{(\cosh(C \cdot L) - 1)} - \cosh(C \cdot L) = \text{λαμβάνουμε:}$$

$$B_{Z=L} = -\frac{T \cdot (\cosh(C \cdot L) - 1)}{C \cdot \sinh(C \cdot L)} \quad (X.1.6)$$

Ετσι γνωρίζοντας τα  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $B$  και αντικαθιστώντας στην (X.1.1) έχουμε :

$$S_{11,11} = T = C \cdot \bar{G} \cdot \bar{J} \cdot \sinh(C \cdot L)$$

Η διρροπή προκύπτει από την εξίσωση (X.1.6) και είναι:

$$S_{4,11} = B_{Z=L} = -\bar{G} \cdot \bar{J} \cdot (\cosh(C \cdot L) - 1)$$

Η τιμή του  $\bar{G} \times \bar{J}$  δίνεται πιο κάτω.

Ανάλογα προκύπτουν η στρέψη και η διρροπή στο άκρο  $k$  και είναι:

$$S_{14,11} = S_{11,11} \text{ και } S_{8,11} = S_{4,1}$$

όλα τα άλλα στοιχεία της στήλης 11 είναι μηδέν.

Παρόμοια προκύπτουν και τα στοιχεία των στηλών 4,8 και 14 με τις παρακάτω συνοριακές συνθήκες :

$$14\text{η στήλη : (i) } \theta_Z = \text{ (ii) } \theta'_{Z=0} = 0 \text{ (iii) } \theta_{Z=L} = 0 \text{ (iv) } \theta'_{Z=0} = 0$$

$$8\text{η στήλη : (i) } \theta_Z = 0 \text{ (ii) } \theta'_{Z=0} = 1 \text{ (iii) } \theta_{Z=L} = 0 \text{ (iv) } \theta'_{Z=0} = 0$$

$$4\text{η στήλη : (i) } \theta_Z = 0 \text{ (ii) } \theta'_{Z=0} = 0 \text{ (iii) } \theta_{Z=L} = 0 \text{ (iv) } \theta'_{Z=0} = 1$$

Ετσι το μητρώο ακαμψίας του πυρήνα ανοικτής διατομής στο τοπικό σύστημα που διέρχεται από το κέντρο διάτμησης και αποτελεί κύριο σύστημα είναι της μορφής :

$$[K_{sp}] = \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,3} & \cdot & S_{1,5} & S_{1,6} & S_{1,7} & \cdot & \cdot & S_{1,10} & \cdot & \cdot & S_{1,13} & \cdot \\ S_{2,1} & S_{2,2} & S_{2,3} & \cdot & S_{2,5} & S_{2,6} & S_{2,7} & \cdot & S_{2,9} & \cdot & \cdot & S_{2,12} & \cdot & \cdot \\ S_{3,1} & S_{3,2} & S_{3,3} & \cdot & S_{3,5} & S_{3,6} & S_{3,7} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & S_{4,4} & \cdot & \cdot & \cdot & S_{4,8} & \cdot & \cdot & S_{4,11} & \cdot & \cdot & S_{4,14} \\ S_{5,1} & S_{5,2} & S_{5,3} & \cdot & S_{5,5} & S_{5,6} & S_{5,7} & \cdot & \cdot & S_{5,10} & \cdot & \cdot & S_{5,13} & \cdot \\ S_{6,1} & S_{6,2} & S_{6,3} & \cdot & S_{6,5} & S_{6,6} & S_{6,7} & \cdot & S_{6,9} & \cdot & \cdot & S_{6,12} & \cdot & \cdot \\ S_{7,1} & S_{7,2} & S_{7,3} & \cdot & S_{7,5} & S_{7,6} & S_{7,7} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & S_{8,4} & \cdot & \cdot & \cdot & S_{11,8} & \cdot & \cdot & S_{8,11} & \cdot & \cdot & S_{8,14} \\ \cdot & S_{9,2} & \cdot & \cdot & \cdot & S_{9,6} & \cdot & \cdot & S_{9,9} & \cdot & \cdot & S_{9,12} & \cdot & \cdot \\ S_{10,1} & \cdot & \cdot & \cdot & S_{10,5} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & S_{10,10} & \cdot & \cdot & S_{10,13} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & S_{11,4} & \cdot & \cdot & \cdot & S_{11,8} & \cdot & \cdot & S_{11,11} & \cdot & \cdot & S_{11,14} \\ \cdot & S_{12,2} & \cdot & \cdot & \cdot & S_{12,6} & \cdot & \cdot & S_{12,9} & \cdot & \cdot & S_{12,12} & \cdot & \cdot \\ S_{13,1} & \cdot & \cdot & \cdot & S_{13,5} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & S_{13,10} & \cdot & \cdot & S_{13,13} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & S_{14,4} & \cdot & \cdot & \cdot & S_{14,8} & \cdot & \cdot & S_{14,11} & \cdot & \cdot & S_{14,14} \end{bmatrix}$$

όπου οι μη μηδενικές του τιμές είναι:

$$S_{1,1} = S_{5,5} = \frac{(4 + g_y) \cdot E \cdot I_x}{(1 + g_y) \cdot L} + Y_0^2 \cdot \frac{A \cdot E}{L}$$

$$S_{2,1} = S_{1,2} = S_{6,5} = S_{5,6} = -X_0 \cdot Y_0 \cdot \frac{A \cdot E}{L}$$

$$S_{3,1} = S_{1,3} = S_{7,5} = S_{5,7} = -Y_0 \cdot \frac{A \cdot E}{L}$$

$$S_{5,1} = S_{1,5} = \frac{(2 - g_y) \cdot E \cdot I_x}{(1 + g_y) \cdot L} + Y_0^2 \cdot \frac{A \cdot E}{L}$$

$$S_{6,1} = S_{1,6} = -S_{2,1}$$

$$S_{7,1} = S_{1,7} = -S_{3,1}$$

$$S_{10,1} = S_{1,10} = \frac{6 \cdot E \cdot I_x}{(1 + g_y) \cdot L^2}$$

$$\begin{aligned}
S_{10,5} &= S_{5,10} = S_{10,1} \\
S_{13,1} &= S_{1,13} = S_{13,5} = S_{5,13} = -S_{10,1} \\
S_{2,2} &= S_{6,6} = \frac{(4+g_x) \cdot E \cdot I_y}{(1+g_x) \cdot L} + X_0^2 \cdot \frac{A \cdot E}{L} \\
S_{3,2} &= S_{2,3} = S_{7,6} = S_{6,7} = X_0 \cdot \frac{A \cdot E}{L} \\
S_{5,2} &= S_{2,5} = -S_{1,2} \\
S_{6,2} &= S_{2,6} = \frac{(2-g_x) \cdot E \cdot I_y}{(1+g_x) \cdot L} - X_0^2 \cdot \frac{A \cdot E}{L} \\
S_{7,2} &= S_{2,7} = -S_{3,2} \\
S_{9,2} &= S_{2,9} = \frac{6 \cdot E \cdot I_y}{(1+g_x) \cdot L^2} \\
S_{9,6} &= S_{6,9} = S_{9,2} \\
S_{12,2} &= S_{2,12} = S_{12,6} = S_{6,12} = -S_{9,2} \\
S_{3,3} &= S_{7,7} = \frac{A \cdot E}{L} \\
S_{5,3} &= S_{3,5} = -S_{1,3} \\
S_{6,3} &= S_{3,6} = -S_{2,3} \\
S_{7,3} &= S_{3,7} = -S_{3,3} \\
S_{4,4} &= S_{8,8} = \frac{\bar{G} \cdot \bar{J}}{C} \cdot C \cdot L \cdot \cosh(C \cdot L) - \sinh(C \cdot L)] \\
S_{8,4} &= S_{4,8} = -\frac{\bar{G} \cdot \bar{J}}{C} \cdot C \cdot L - \sinh(C \cdot L)] \\
S_{11,4} &= S_{4,11} = -\frac{\bar{G} \cdot \bar{J}}{C} \cdot C \cdot L - \cosh(C \cdot L) - 1] \\
S_{14,4} &= S_{4,14} = S_{14,8} = S_{8,14} = -S_{11,4} \\
S_{11,8} &= S_{8,11} = S_{11,4} \\
S_{9,9} &= \frac{12 \cdot E \cdot I_y}{(1+g_x) \cdot L^3} \\
S_{12,9} &= S_{9,12} = -S_{9,9} \\
S_{11,11} &= C \cdot \bar{G} \cdot \bar{J} \cdot \sinh(C \cdot L) \\
S_{14,11} &= S_{11,14} = -S_{11,11}
\end{aligned}$$

Τα μεγέθη  $C$  ,  $J$  ,  $X_0$  ,  $Y_0$  , που περιγράφονται στις προηγούμενες παραγράφους και στο παράρτημα Γ είναι :

$G$  είναι το μέτρο διάτμησης,  $I_x$  ,  $I_y$  οι ροπές αδράνειας,  
 $E$  το μέτρο ελαστικότητας,  $A$  το εμβαδόν της διατομής,  
 $L$  το μήκος του στοιχείου.







Είναι συμμετρικό μητρώο τα δε μη μηδενικά  $\bar{S}_{ij}$  δίνονται στο παράρτημα.

Το μητρώο αυτό, όπως και για τη κολόνα δεν εξαρτάται μόνο από τις γεωμετρικές και μηχανικές ιδιότητες του πυρήνα αλλά και από τη χωροθέτηση του στη όλη κατασκευή.

<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ</b>
------------------

Τοπικό και καθολικό μητρώο ακαμψίας πυρήνα ανοικτής διατομής  
Τοπικό μητρώο ακαμψίας

$$[K_{sp}] = \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,3} & \cdot & S_{1,5} & S_{1,6} & S_{1,7} & \cdot & \cdot & S_{1,10} & \cdot & \cdot & S_{1,13} & \cdot \\ S_{2,1} & S_{2,2} & S_{2,3} & \cdot & S_{2,5} & S_{2,6} & S_{2,7} & \cdot & S_{2,9} & \cdot & \cdot & S_{2,12} & \cdot & \cdot \\ S_{3,1} & S_{3,2} & S_{3,3} & \cdot & S_{3,5} & S_{3,6} & S_{3,7} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & S_{4,4} & \cdot & \cdot & \cdot & S_{4,8} & \cdot & \cdot & S_{4,11} & \cdot & \cdot & S_{4,14} \\ S_{5,1} & S_{5,2} & S_{5,3} & \cdot & S_{5,5} & S_{5,6} & S_{5,7} & \cdot & \cdot & S_{5,10} & \cdot & \cdot & S_{5,13} & \cdot \\ S_{6,1} & S_{6,2} & S_{6,3} & \cdot & S_{6,5} & S_{6,6} & S_{1,1} & \cdot & S_{6,9} & \cdot & \cdot & S_{6,12} & \cdot & \cdot \\ S_{7,1} & S_{7,2} & S_{7,3} & \cdot & S_{7,5} & S_{7,6} & S_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & S_{8,4} & \cdot & \cdot & \cdot & S_{8,8} & \cdot & \cdot & S_{8,11} & \cdot & \cdot & S_{8,14} \\ \cdot & S_{9,2} & \cdot & \cdot & \cdot & S_{9,6} & \cdot & \cdot & S_{9,9} & \cdot & \cdot & S_{9,12} & \cdot & \cdot \\ S_{10,1} & \cdot & \cdot & \cdot & S_{10,5} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & S_{10,10} & \cdot & \cdot & S_{10,13} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & S_{11,4} & \cdot & \cdot & \cdot & S_{11,8} & \cdot & \cdot & S_{11,11} & \cdot & \cdot & S_{11,14} \\ \cdot & S_{12,2} & \cdot & \cdot & \cdot & S_{12,6} & \cdot & \cdot & S_{12,9} & \cdot & \cdot & S_{12,12} & \cdot & \cdot \\ S_{13,1} & \cdot & \cdot & \cdot & S_{13,5} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & S_{13,10} & \cdot & \cdot & S_{13,13} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & S_{14,4} & \cdot & \cdot & \cdot & S_{14,8} & \cdot & \cdot & S_{14,11} & \cdot & \cdot & S_{14,14} \end{bmatrix}$$

όπου οι μη μηδενικές του τιμές είναι:

$$S_{1,1} = S_{5,5} = \frac{(4 + g_y) \cdot E \cdot I_x}{(1 + g_y) \cdot L} + Y_0^2 \cdot \frac{A \cdot E}{L}$$

$$S_{2,1} = S_{1,2} = S_{6,5} = S_{5,6} = -X_0 \cdot Y_0 \cdot \frac{A \cdot E}{L}$$

$$S_{3,1} = S_{1,3} = S_{7,5} = S_{5,7} = -Y_0 \cdot \frac{A \cdot E}{L}$$

$$S_{5,1} = S_{1,5} = \frac{(2 - g_y) \cdot E \cdot I_x}{(1 + g_y) \cdot L} - Y_0^2 \cdot \frac{A \cdot E}{L}$$

$$S_{6,1} = S_{1,6} = -S_{2,1}$$

$$S_{7,1} = S_{1,7} = -S_{3,1}$$

$$S_{10,1} = S_{1,10} = \frac{6 \cdot E \cdot I_x}{(1 + g_y) \cdot L^2}$$

$$S_{10,5} = S_{5,10} = S_{10,1}$$

$$S_{13,1} = S_{1,13} = S_{13,5} = S_{5,13} = -S_{10,1}$$

$$S_{2,2} = S_{6,6} = \frac{(4 + g_x) \cdot E \cdot I_y}{(1 + g_x) \cdot L} + X_0^2 \cdot \frac{A \cdot E}{L}$$

$$S_{3,2} = S_{2,3} = S_{7,6} = S_{6,7} = X_0 \cdot \frac{A \cdot E}{L}$$

$$S_{5,2} = S_{2,5} = -S_{1,2}$$

$$S_{6,2} = S_{2,6} = \frac{(2 - g_x) \cdot E \cdot I_y}{(1 + g_x) \cdot L} - X_0^2 \cdot \frac{A \cdot E}{L}$$

$$S_{7,2} = S_{2,7} = -S_{3,2}$$

$$S_{9,2} = S_{2,9} = \frac{6 \cdot E \cdot I_x}{(1 + g_y) \cdot L^2}$$

$$S_{9,6} = S_{6,9} = S_{9,2}$$

$$S_{12,2} = S_{2,12} = S_{12,6} = S_{6,12} = -S_{9,2}$$

$$S_{3,3} = S_{7,7} = \frac{A \cdot E}{L}$$

$$S_{5,3} = S_{3,5} = -S_{1,3}$$

$$S_{6,3} = S_{3,6} = -S_{2,3}$$

$$S_{7,3} = S_{3,7} = -S_{3,3}$$

$$S_{4,4} = S_{8,8} = \frac{\bar{G} \cdot \bar{J}}{C} \cdot C \cdot L \cdot \cosh(C \cdot L) - \sinh(C \cdot L)]$$

$$S_{8,4} = S_{4,8} = -\frac{\bar{G} \cdot \bar{J}}{C} \cdot C \cdot L - \sinh(C \cdot L)]$$

$$S_{11,4} = S_{4,11} = -\bar{G} \cdot \bar{J} \cdot \cosh(C \cdot L) - 1]$$

$$S_{14,4} = S_{4,14} = S_{14,8} = S_{8,14} = -S_{11,4}$$

$$S_{11,8} = S_{8,11} = S_{11,4}$$

$$S_{9,9} = \frac{12 \cdot E \cdot I_y}{(1 + g_x) \cdot L^3}$$

$$S_{12,9} = S_{9,12} = -S_{9,9}$$

$$S_{10,10} = \frac{12 \cdot E \cdot I_x}{(1 + g_y) \cdot L^3}$$

$$S_{13,10} = S_{10,13} = -S_{10,10}$$

$$S_{11,11} = C \cdot \bar{G} \cdot \bar{J} \cdot \sinh(C \cdot L)$$

$$S_{14,11} = S_{11,14} = -S_{11,11}$$

Καθολικό μητρώο ακαμψίας

$$[\bar{K}_{sp}] = \begin{bmatrix} \bar{S}_{1,1} & \bar{S}_{1,2} & \bar{S}_{1,3} & \cdot & \bar{S}_{1,5} & \bar{S}_{1,6} & \bar{S}_{1,7} & \cdot & \bar{S}_{1,9} & \bar{S}_{1,10} & \bar{S}_{1,11} & \bar{S}_{1,12} & \bar{S}_{1,13} & \bar{S}_{1,14} \\ \bar{S}_{2,1} & \bar{S}_{2,2} & \bar{S}_{2,3} & \cdot & \bar{S}_{2,5} & \bar{S}_{2,6} & \bar{S}_{2,7} & \cdot & \bar{S}_{2,9} & \bar{S}_{2,10} & \bar{S}_{2,11} & \bar{S}_{2,12} & \bar{S}_{2,13} & \bar{S}_{2,14} \\ \bar{S}_{3,1} & \bar{S}_{3,2} & \bar{S}_{3,3} & \cdot & \bar{S}_{3,5} & \bar{S}_{3,6} & \bar{S}_{3,7} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bar{S}_{4,4} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{S}_{4,8} & \cdot & \cdot & \bar{S}_{4,11} & \cdot & \cdot & \bar{S}_{4,14} \\ \bar{S}_{5,1} & \bar{S}_{5,2} & \bar{S}_{5,3} & \cdot & \bar{S}_{5,5} & \bar{S}_{5,6} & \bar{S}_{5,7} & \cdot & \bar{S}_{5,9} & \bar{S}_{5,10} & \bar{S}_{5,11} & \bar{S}_{5,12} & \bar{S}_{5,13} & \bar{S}_{5,14} \\ \bar{S}_{6,1} & \bar{S}_{6,2} & \bar{S}_{6,3} & \cdot & \bar{S}_{6,5} & \bar{S}_{6,6} & \bar{S}_{6,7} & \cdot & \bar{S}_{6,9} & \bar{S}_{6,10} & \bar{S}_{6,11} & \bar{S}_{6,12} & \bar{S}_{6,13} & \bar{S}_{6,14} \\ \bar{S}_{7,1} & \bar{S}_{7,2} & \bar{S}_{7,3} & \cdot & \bar{S}_{7,5} & \bar{S}_{7,6} & \bar{S}_{7,7} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bar{S}_{8,4} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{S}_{8,8} & \cdot & \cdot & \bar{S}_{8,11} & \cdot & \cdot & \bar{S}_{8,14} \\ \bar{S}_{9,1} & \bar{S}_{9,2} & \cdot & \cdot & \bar{S}_{9,5} & \bar{S}_{9,6} & \cdot & \cdot & \bar{S}_{9,9} & \bar{S}_{9,10} & \bar{S}_{9,11} & \bar{S}_{9,12} & \bar{S}_{9,13} & \bar{S}_{9,14} \\ \bar{S}_{10,1} & \bar{S}_{10,2} & \cdot & \cdot & \bar{S}_{10,5} & \bar{S}_{10,6} & \cdot & \cdot & \bar{S}_{10,9} & \bar{S}_{10,10} & \bar{S}_{10,11} & \bar{S}_{10,12} & \bar{S}_{10,13} & \bar{S}_{10,14} \\ \bar{S}_{11,1} & \bar{S}_{11,2} & \cdot & \bar{S}_{11,4} & \bar{S}_{11,5} & \bar{S}_{11,6} & \cdot & \bar{S}_{11,8} & \bar{S}_{11,9} & \bar{S}_{11,10} & \bar{S}_{11,11} & \bar{S}_{11,12} & \bar{S}_{11,13} & \bar{S}_{11,14} \\ \bar{S}_{12,1} & \bar{S}_{12,2} & \cdot & \cdot & \bar{S}_{12,5} & \bar{S}_{12,6} & \cdot & \cdot & \bar{S}_{12,9} & \bar{S}_{12,10} & \bar{S}_{12,11} & \bar{S}_{12,12} & \bar{S}_{12,13} & \bar{S}_{12,14} \\ \bar{S}_{13,1} & \bar{S}_{13,2} & \cdot & \cdot & \bar{S}_{13,5} & \bar{S}_{13,6} & \cdot & \cdot & \bar{S}_{13,9} & \bar{S}_{13,10} & \bar{S}_{13,11} & \bar{S}_{13,12} & \bar{S}_{13,13} & \bar{S}_{13,14} \\ \bar{S}_{14,1} & \bar{S}_{14,2} & \cdot & \bar{S}_{14,4} & \bar{S}_{14,5} & \bar{S}_{14,6} & \cdot & \bar{S}_{14,8} & \bar{S}_{14,9} & \bar{S}_{14,10} & \bar{S}_{14,11} & \bar{S}_{14,12} & \bar{S}_{14,13} & \bar{S}_{14,14} \end{bmatrix}$$

Τα δε μη μηδενικά στοιχεία του καθολικού μητρώου  $\bar{S}_{ij}$  είναι :

$$\begin{aligned}
\bar{S}_{1,1} &= \cos\alpha \cdot (S_{1,1} \cdot \cos\alpha - S_{2,1} \cdot \sin\alpha) - \sin\alpha \cdot (S_{2,1} \cdot \cos\alpha - S_{2,2} \cdot \sin\alpha) \\
\bar{S}_{1,2} &= \sin\alpha \cdot (S_{1,1} \cdot \cos\alpha - S_{2,1} \cdot \sin\alpha) + \cos\alpha \cdot (S_{2,1} \cdot \cos\alpha - S_{2,2} \cdot \sin\alpha) \\
\bar{S}_{1,3} &= \cos\alpha \cdot S_{3,1} - \sin\alpha \cdot S_{3,2} \\
\bar{S}_{1,5} &= \cos\alpha \cdot (S_{5,1} \cdot \cos\alpha - S_{2,1} \cdot \sin\alpha) + \sin\alpha \cdot (S_{2,1} \cdot \cos\alpha + S_{6,2} \cdot \sin\alpha) \\
\bar{S}_{1,6} &= \sin\alpha \cdot (S_{5,1} \cdot \cos\alpha + S_{2,1} \cdot \sin\alpha) - \cos\alpha \cdot (S_{2,1} \cdot \cos\alpha + S_{6,2} \cdot \sin\alpha) \\
\bar{S}_{1,7} &= -\cos\alpha \cdot S_{3,1} + \sin\alpha \cdot S_{3,2} \\
\bar{S}_{1,8} &= 0 \\
\bar{S}_{1,9} &= -\cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot (S_{9,2} + S_{10,1}) \\
\bar{S}_{1,10} &= \cos^2\alpha \cdot S_{10,1} - \sin\alpha \cdot S_{9,2} \\
\bar{S}_{1,11} &= \cos\alpha \cdot S_{10,1} \cdot (Y \cdot \sin\alpha + X \cdot \cos\alpha) - \sin\alpha \cdot S_{9,2} \cdot (X \cdot \sin\alpha - Y \cdot \cos\alpha) \\
\bar{S}_{1,12} &= \cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot (S_{9,2} + S_{10,1}) \\
\bar{S}_{1,13} &= \sin^2\alpha \cdot S_{9,2} - \cos^2\alpha \cdot S_{10,1} \\
\bar{S}_{1,14} &= -\cos\alpha \cdot S_{10,1} \cdot (Y \cdot \sin\alpha + X \cdot \cos\alpha) + \sin\alpha \cdot S_{9,2} \cdot (X \cdot \sin\alpha - Y \cdot \cos\alpha) \\
\bar{S}_{2,2} &= \cos\alpha \cdot (S_{2,1} \cdot \sin\alpha + S_{2,2} \cdot \cos\alpha) + \sin\alpha \cdot (S_{1,1} \cdot \sin\alpha + S_{2,1} \cdot \cos\alpha) \\
\bar{S}_{2,3} &= \sin\alpha \cdot S_{3,1} + \cos\alpha \cdot S_{3,2} \\
\bar{S}_{2,4} &= 0 \\
\bar{S}_{2,5} &= \cos\alpha \cdot (S_{5,1} \cdot \sin\alpha - S_{2,1} \cdot \cos\alpha) - \sin\alpha \cdot (S_{6,2} \cdot \cos\alpha - S_{2,1} \cdot \sin\alpha) \\
\bar{S}_{2,6} &= \sin\alpha \cdot (S_{5,1} \cdot \sin\alpha - S_{2,1} \cdot \cos\alpha) + \cos\alpha \cdot (S_{6,2} \cdot \cos\alpha - S_{2,1} \cdot \sin\alpha) \\
\bar{S}_{2,7} &= -\sin\alpha \cdot S_{3,1} - \cos\alpha \cdot S_{3,2} \\
\bar{S}_{2,8} &= 0 \\
\bar{S}_{2,9} &= \cos^2\alpha \cdot S_{9,2} - \sin^2\alpha \cdot S_{10,2} \\
\bar{S}_{2,10} &= \cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot (S_{9,2} + S_{10,1}) \\
\bar{S}_{2,11} &= \cos\alpha \cdot S_{9,2} \cdot (-Y \cdot \cos\alpha + X \cdot \sin\alpha) + \sin\alpha \cdot S_{10,1} \cdot (Y \cdot \sin\alpha + X \cdot \cos\alpha) \\
\bar{S}_{2,12} &= -\cos^2\alpha \cdot S_{9,2} + \sin^2\alpha \cdot S_{10,1} \\
\bar{S}_{2,13} &= -\cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot (S_{9,2} + S_{10,1}) \\
\bar{S}_{2,14} &= -\cos\alpha \cdot S_{9,2} \cdot (-Y \cdot \cos\alpha + X \cdot \sin\alpha) + \sin\alpha \cdot S_{10,1} \cdot (Y \cdot \sin\alpha + X \cdot \cos\alpha) \\
\bar{S}_{3,3} &= S_{3,3} = 0 \\
\bar{S}_{3,4} &= 0 \\
\bar{S}_{3,5} &= \sin\alpha \cdot S_{3,2} - \cos\alpha \cdot S_{3,1} \\
\bar{S}_{3,6} &= -\sin\alpha \cdot S_{3,1} - \cos\alpha \cdot S_{3,2} \\
\bar{S}_{3,7} &= -S_{3,3} = 0 \\
\bar{S}_{3,8} &= 0 \\
\bar{S}_{3,9} &= 0 \\
\bar{S}_{3,10} &= 0 \\
\bar{S}_{3,11} &= 0 \\
\bar{S}_{3,12} &= 0 \\
\bar{S}_{3,13} &= 0 \\
\bar{S}_{3,14} &= 0
\end{aligned}$$

$$\bar{S}_{4,4} = S_{4,4}$$

$$\bar{S}_{4,5} = 0$$

$$\bar{S}_{4,6} = 0$$

$$\bar{S}_{4,7} = 0$$

$$\bar{S}_{4,8} = S_{8,4}$$

$$\bar{S}_{4,9} = 0$$

$$\bar{S}_{4,10} = 0$$

$$\bar{S}_{4,11} = S_{11,4}$$

$$\bar{S}_{4,12} = 0$$

$$\bar{S}_{4,13} = 0$$

$$\bar{S}_{4,14} = -S_{11,4}$$

$$\bar{S}_{5,5} = \cos \alpha \cdot (S_{1,1} \cdot \cos \alpha - S_{2,1} \cdot \sin \alpha) - \sin \alpha \cdot (S_{2,1} \cdot \cos \alpha - S_{2,2} \cdot \sin \alpha)$$

$$\bar{S}_{5,6} = \sin \alpha \cdot (S_{1,1} \cdot \cos \alpha - S_{2,1} \cdot \sin \alpha) + \cos \alpha \cdot (S_{2,1} \cdot \cos \alpha - S_{2,2} \cdot \sin \alpha)$$

$$\bar{S}_{5,7} = \cos \alpha \cdot S_{3,1} - \sin \alpha \cdot S_{3,2}$$

$$\bar{S}_{5,8} = 0$$

$$\bar{S}_{5,9} = -\cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot (S_{9,2} + S_{10,1})$$

$$\bar{S}_{5,10} = \cos^2 \alpha \cdot S_{10,1} - \sin^2 \alpha \cdot S_{9,2}$$

$$\bar{S}_{5,11} = \cos \alpha \cdot S_{10,1} \cdot (Y \cdot \sin \alpha + X \cdot \cos \alpha) - \sin \alpha S_{9,2} \cdot (X \cdot \sin \alpha - Y \cdot \cos \alpha)$$

$$\bar{S}_{5,12} = \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot (S_{9,2} + S_{10,1})$$

$$\bar{S}_{5,13} = -\cos^2 \alpha \cdot S_{10,1} + \sin^2 \alpha \cdot S_{9,2}$$

$$\bar{S}_{5,14} = \sin \alpha \cdot S_{9,2} \cdot (-Y \cdot \cos \alpha + X \cdot \sin \alpha) - \cos \alpha \cdot S_{10,1} \cdot (Y \cdot \sin \alpha + X \cdot \cos \alpha)$$

$$\bar{S}_{6,6} = \sin \alpha \cdot (S_{1,1} \cdot \sin \alpha + S_{2,1} \cdot \cos \alpha) + \cos \alpha \cdot (S_{2,2} \cdot \cos \alpha + S_{2,1} \cdot \sin \alpha)$$

$$\bar{S}_{6,7} = \sin \alpha \cdot S_{3,1} + \cos \alpha \cdot S_{3,2}$$

$$\bar{S}_{6,8} = 0$$

$$\bar{S}_{6,9} = \cos^2 \alpha \cdot S_{9,2} - \sin^2 \alpha \cdot S_{10,1}$$

$$\bar{S}_{6,10} = \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot (S_{9,2} + S_{10,1})$$

$$\bar{S}_{6,11} = \cos \alpha \cdot S_{9,2} \cdot (-Y \cdot \cos \alpha + X \cdot \sin \alpha) + \sin \alpha \cdot S_{10,1} \cdot (Y \cdot \sin \alpha + X \cdot \cos \alpha)$$

$$\bar{S}_{6,12} = \sin^2 \alpha \cdot S_{10,1} - \cos^2 \alpha \cdot S_{9,2}$$

$$\bar{S}_{6,13} = -\cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot (S_{9,2} + S_{10,1})$$

$$\bar{S}_{6,14} = -\cos \alpha \cdot S_{9,2} \cdot (-Y \cdot \cos \alpha + X \cdot \sin \alpha) - \sin \alpha \cdot S_{10,1} \cdot (Y \cdot \sin \alpha + X \cdot \cos \alpha)$$

$$\bar{S}_{7,7} = S_{3,3}$$

$$\bar{S}_{7,8} = 0$$

$$\bar{S}_{7,9} = 0$$

$$\bar{S}_{7,10} = 0$$

$$\bar{S}_{7,11} = 0$$

$$\bar{S}_{7,12} = 0$$

$$\bar{S}_{7,13} = 0$$

$$\bar{S}_{7,14} = 0$$

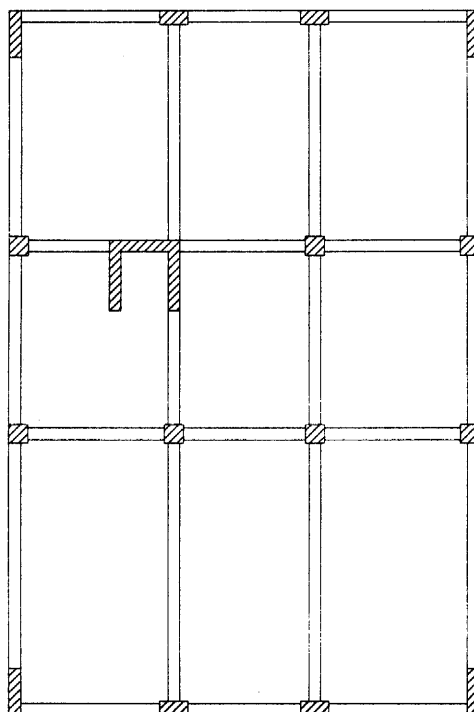
$$\begin{aligned}
\bar{S}_{8,8} &= S_{4,4} \\
\bar{S}_{8,9} &= 0 \\
\bar{S}_{8,10} &= 0 \\
\bar{S}_{8,11} &= S_{11,4} \\
\bar{S}_{8,12} &= 0 \\
\bar{S}_{8,13} &= 0 \\
\bar{S}_{8,14} &= -S_{11,4} \\
\bar{S}_{9,9} &= \cos^2 \alpha \cdot S_{9,2} - \sin^2 \alpha \cdot S_{10,10} \\
\bar{S}_{9,10} &= \cos \cdot \sin \alpha \cdot (S_{9,9} - S_{10,10}) \\
\bar{S}_{9,11} &= \cos \alpha \cdot S_{9,9} \cdot (-Y \cdot \cos \alpha + X \cdot \sin \alpha) - \sin \alpha \cdot S_{10,10} \cdot (Y \cdot \sin \alpha + X \cdot \cos \alpha) \\
\bar{S}_{9,12} &= -\sin^2 \alpha \cdot S_{10,10} - \cos^2 \alpha \cdot S_{9,9} \\
\bar{S}_{9,13} &= -\cos \cdot \sin \alpha \cdot (S_{9,9} - S_{10,10}) \\
\bar{S}_{9,14} &= \sin \alpha \cdot S_{10,10} \cdot (X \cdot \cos \alpha + Y \cdot \sin \alpha) - \cos \alpha \cdot S_{9,9} \cdot (X \cdot \sin \alpha - Y \cdot \cos \alpha) \\
\bar{S}_{10,10} &= \sin^2 \alpha \cdot S_{9,9} + \cos^2 \alpha \cdot S_{10,10} \\
\bar{S}_{10,11} &= \sin \alpha \cdot S_{9,9} \cdot (-Y \cdot \cos \alpha + X \cdot \sin \alpha) + \cos \alpha \cdot S_{10,10} \cdot (Y \cdot \sin \alpha + X \cdot \cos \alpha) \\
\bar{S}_{10,12} &= -\cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot (S_{9,9} - S_{10,10}) \\
\bar{S}_{10,13} &= -\cos^2 \alpha \cdot S_{10,10} - \sin^2 \alpha \cdot S_{9,9} \\
\bar{S}_{10,14} &= -\sin \alpha \cdot S_{9,9} \cdot (X \cdot \sin \alpha - Y \cdot \cos \alpha) - \cos \alpha \cdot S_{10,10} \cdot (X \cdot \cos \alpha - Y \cdot \sin \alpha) \\
\bar{S}_{11,11} &= S_{9,9} \cdot (X \cdot \sin \alpha - Y \cdot \cos \alpha) \cdot (X \cdot \sin \alpha - Y \cdot \cos \alpha) + \\
&+ S_{10,10} \cdot (Y \cdot \sin \alpha + X \cdot \cos \alpha) \cdot (X \cdot \cos \alpha + Y \cdot \sin \alpha) + S_{11,11} \\
\bar{S}_{11,12} &= \sin \alpha \cdot S_{10,10} \cdot (X \cdot \cos \alpha + Y \cdot \sin \alpha) - \cos \alpha \cdot S_{9,9} \cdot (X \cdot \sin \alpha - Y \cdot \cos \alpha) \\
\bar{S}_{11,13} &= -\sin \alpha \cdot S_{9,9} \cdot (X \cdot \sin \alpha - Y \cdot \cos \alpha) - \cos \alpha \cdot S_{10,10} \cdot (X \cdot \cos \alpha + Y \cdot \sin \alpha) \\
\bar{S}_{11,14} &= -S_{9,9} \cdot (X \cdot \sin \alpha - Y \cdot \cos \alpha) \cdot (X \cdot \sin \alpha - Y \cdot \cos \alpha) - \\
&- S_{10,10} \cdot (Y \cdot \sin \alpha + X \cdot \cos \alpha) \cdot (X \cdot \cos \alpha + Y \cdot \sin \alpha) - S_{11,11} \\
\bar{S}_{12,12} &= \sin^2 \alpha \cdot S_{10,10} + \cos^2 \alpha \cdot S_{9,9} \\
\bar{S}_{12,13} &= \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot (S_{9,9} - S_{10,10}) \\
\bar{S}_{12,14} &= \cos \alpha \cdot S_{9,9} \cdot (X \cdot \sin \alpha - Y \cdot \cos \alpha) - \sin \alpha \cdot S_{10,10} \cdot (X \cdot \cos \alpha + Y \cdot \sin \alpha) \\
\bar{S}_{13,13} &= \sin^2 \alpha \cdot S_{9,9} + \cos^2 \alpha \cdot S_{10,10} \\
\bar{S}_{13,14} &= \sin \alpha \cdot S_{9,9} \cdot (-Y \cdot \cos \alpha + X \cdot \sin \alpha) + \cos \alpha \cdot S_{10,10} \cdot (Y \cdot \sin \alpha + X \cdot \cos \alpha) \\
\bar{S}_{14,14} &= S_{9,9} \cdot (X \cdot \sin \alpha - Y \cdot \cos \alpha) \cdot (X \cdot \sin \alpha - Y \cdot \cos \alpha) + \\
&+ S_{10,10} \cdot (Y \cdot \sin \alpha + X \cdot \cos \alpha) \cdot (X \cdot \cos \alpha + Y \cdot \sin \alpha) + S_{11,11}
\end{aligned}$$



## ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

Για τις ανάγκες ελέγχου της συμπεριφοράς των κτιρίων, τα οποία φέρουν στο δομικό σύστημα τους πυρήνα, προσομοιώθηκαν και αναλύθηκαν τέσσερα συνολικά εξαόροφα κτίρια, με ύψος ορόφου 3m δύο διαφορετικών τύπων κάτοψης.

Ο πρώτος τύπος κάτοψης, που εικονίζεται στο σχήμα 1, αναλύθηκε αφενός με το πρόγραμμα που αναπτύχθηκε για την προσομοίωση των πυρήνων το οποίο στο εξής θα αναφέρεται με το όνομα ACT, και αφετέρου με δύο γνωστά ακόμα προγράμματα του εμπορίου, ένα κλασικό πρόγραμμα στατικής ανάλυσης ραβδωτών φορέων το οποίο θα αναφέρεται ως *πρόγραμμα 1* (πρόγραμμα SPACE) και το δεύτερο ένα πρόγραμμα ανάλυσης με πεπερασμένα στοιχεία το οποίο θα αναφέρεται ως *πρόγραμμα 2* (πρόγραμμα SOFiSTiK).



Σχήμα 1 Κτίριο α' κάτοψης

Το κτίριο του σχήματος 1 φέρει μόνιμο φορτίο πλακών  $1.50 \text{ kN/m}^2$  και κινητό  $2.00 \text{ kN/m}^2$ .

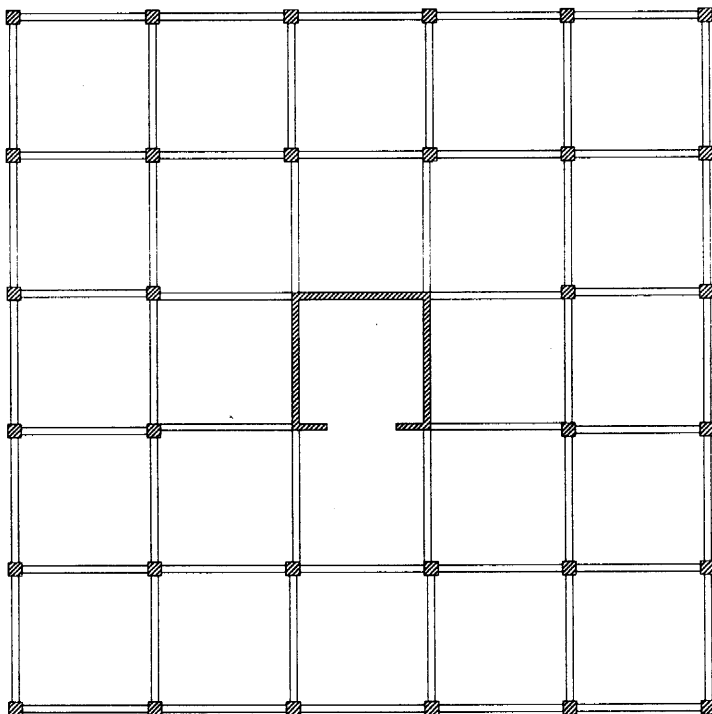
Κατά την προσομοίωση του παραπάνω κτιρίου με πεπερασμένα στοιχεία χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία «κελύφους» για τα τοιχώματα και τον πυρήνα (που επιτρέπουν μεμβρανική και καμπτική ένταση) και ραβδωτά στοιχεία για τα υποστυλώματα και τα δοκάρια. Επιβλήθηκε επίσης διαφραγματική λειτουργία στις στάθμες των ορόφων.

Το κτίριο αναλύθηκε για δύο οριζόντιες κάθετες μεταξύ τους σεισμικές φορτίσεις X και Y που προκύπτουν από τον Ν.Ε.Α.Κ. για κατηγορία εδάφους Α, ζώνη σεισμικής επικινδυνότητας ΙΙ, συντελεστή σπουδαιότητας 1, συντελεστή θεμελίωσης 1,  $q=3.5$  και συντελεστή κινητών φορτίων  $\psi_2=0.3$ . Τα κτίρια έχουν επιλεγεί κατά τρόπο που αναδεικνύουν την καθοριστική συμβολή του πυρήνα ώστε να προσφέρονται για συγκρίσεις.

Η προσομοίωση των ακαμψιών των στοιχείων γίνεται σύμφωνα με τις απαιτήσεις του Ν.Ε.Α.Κ. με την θεώρηση μειωμένων τιμών, (0.5 για τα δοκάρια, 0.80 για τα τοιχώματα και 0.10 για τις στρεπτικές ακαμψίες. Οι μειώσεις αυτές μεταβάλλουν τις συντεταγμένες του κέντρου διατμήσεως του πυρήνα και τα χαρακτηριστικά στρέβλωσης για τα οποία δεν υπάρχει η δυνατότητα άμεσης σύγκρισης με τα άλλα προγράμματα καθόσον αυτά δεν θεωρούν τους πυρήνες ως στοιχεία ανοικτής διατομής.

Στα αποτελέσματα που προκύπτουν παρουσιάζονται με τη μορφή διαγραμμάτων οι διαφορές που προέκυψαν για τις μετακινήσεις των ορόφων με βάση τα τρία αυτά προγράμματα.

Ο δεύτερος τύπος κάτοψης που εικονίζεται στο σχήμα 2 αναλύθηκε με το πρόγραμμα ACT καθώς επίσης και με το πρόγραμμα 1.



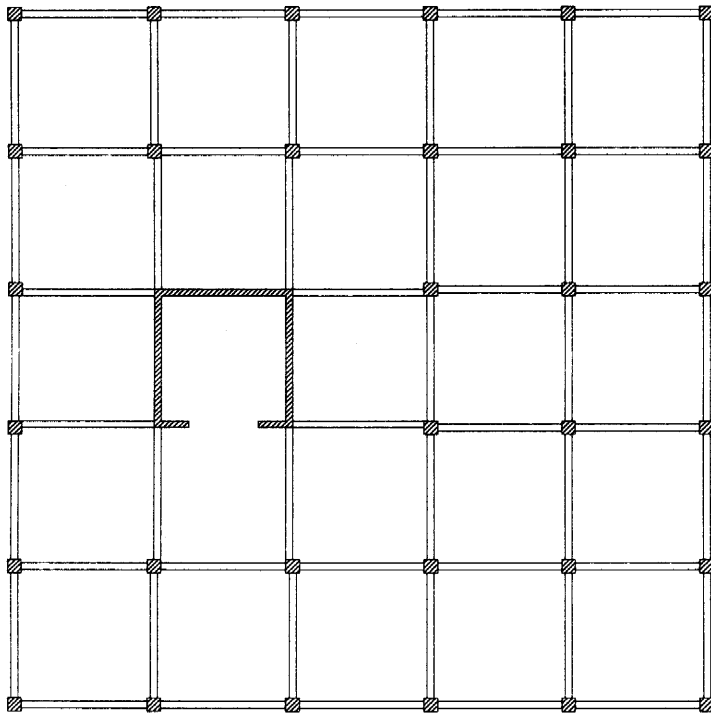
Σχήμα 2 Κτίριο β' κάτοψης

Το κτίριο του σχήματος 2 φέρει μόνιμο φορτίο πλακών  $1.00 \text{ kN/m}^2$  και κινητό  $2.00 \text{ kN/m}^2$ .

Το κτίριο αναλύθηκε όπως και το προηγούμενο για δύο σεισμικές φορτίσεις X και Y που προκύπτουν από τον Ν.Ε.Α.Κ. με τις ίδιες παραδοχές που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Στα αποτελέσματα που παραδίδονται εικονίζονται πάλι οι διαφορές των μετατοπίσεων των διαφραγμάτων και επίσης συγκρίνονται τα εντατικά μεγέθη που προκύπτουν για τις συντρέχουσες στον πυρήνα δοκούς.

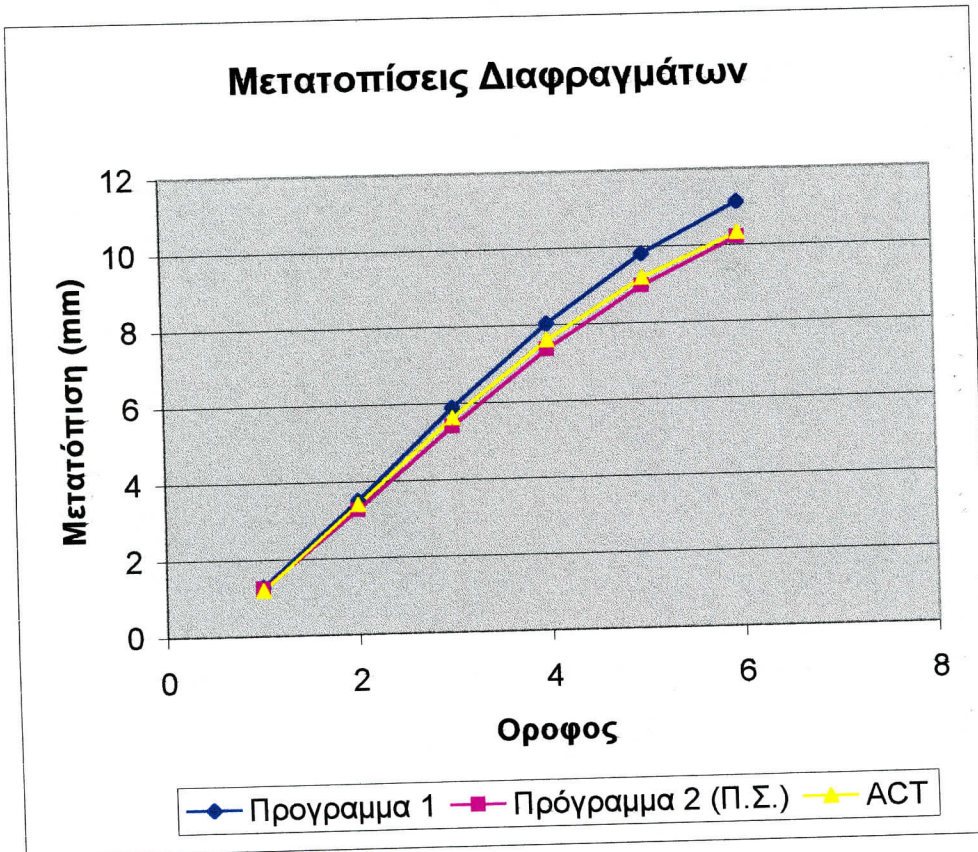
Επίσης αναλύθηκαν δύο ακόμη εξαόροφα κτίρια τα οποία είναι παραλλαγές του κτιρίου β' κάτοψης για έκκεντρες θέσεις του πυρήνα και τα οποία εικονίζονται στα σχήματα 3 και 4 με κάναβο 5 μέτρα.



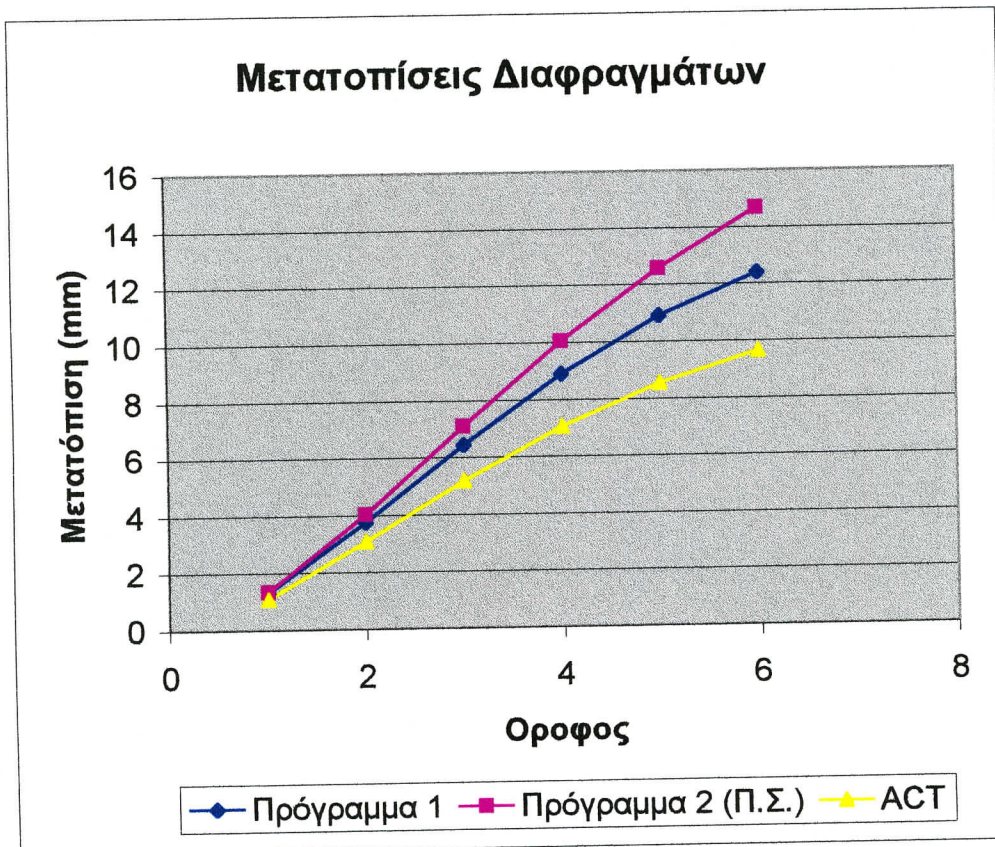
Σχήμα 3 Κτίριο β' κάτοψης - παραλλαγή 1



Κτήριο 1			
ΣΕΙΣΜΟΣ Χ			
Μετατοπίσεις Διαφραγμάτων (mm)			
Οροφος	Πρόγρ.1	Πρόγρ.2	ACT
1	1.28	1.24	1.2
2	3.5	3.26	3.4
3	5.88	5.397	5.62
4	8.04	7.359	7.6
5	9.81	8.98	9.18
6	11.12	10.2	10.32

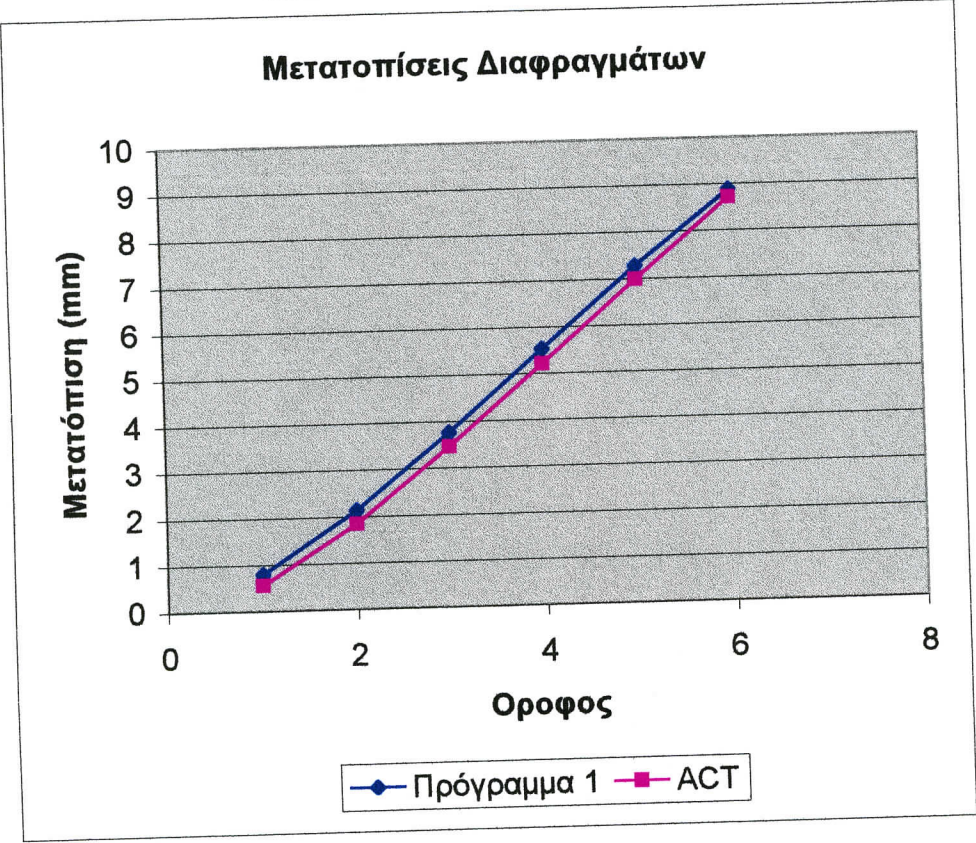


Κτήριο 1			
ΣΕΙΣΜΟΣ Υ			
Μετατοπίσεις Διαφραγμάτων (mm)			
Οροφος	Πρόγρ.1	Πρόγρ.2	ACT
1	1.3	1.327	1.08
2	3.75	4.014	3.059
3	6.44	7.092	5.16
4	8.89	10.032	7.04
5	10.89	12.56	8.54
6	12.39	14.66	9.63

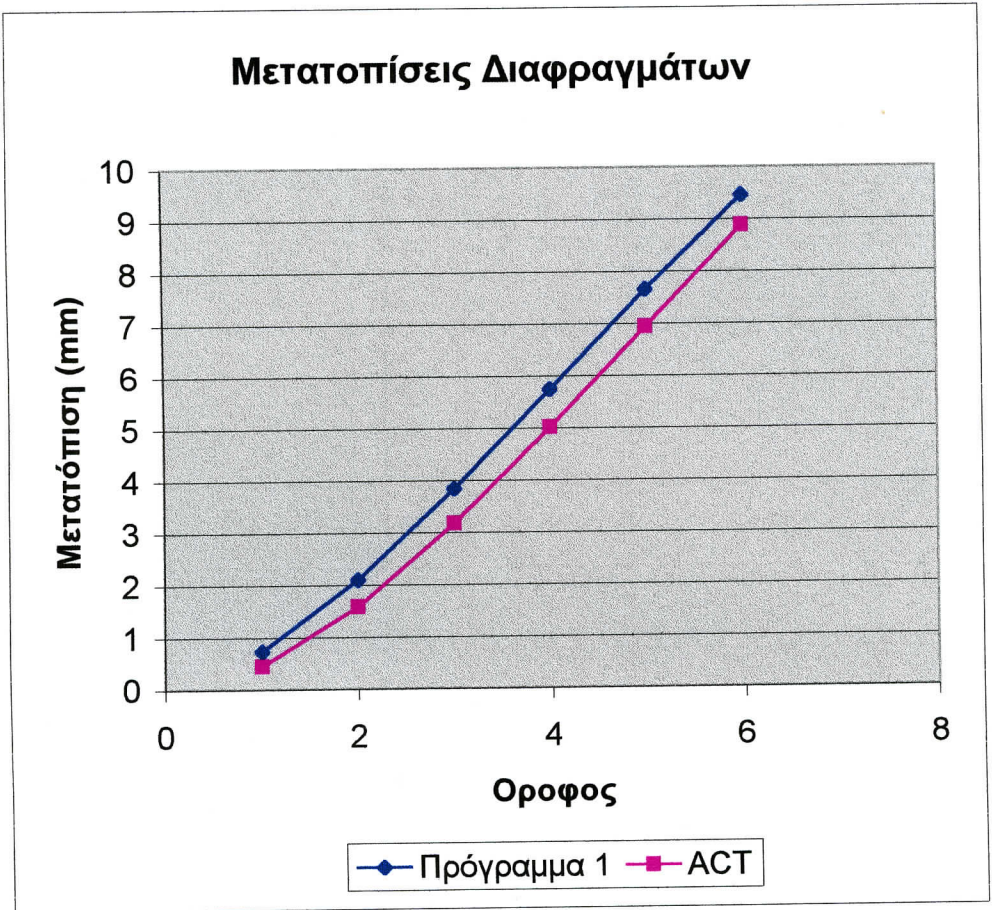




Κτήριο 2		
ΣΕΙΣΜΟΣ Χ-Χ		
Μετατοπίσεις Διαφραγμ.(mm)		
Οροφος Νο	Προγρ.1	ACT
1	0.783	0.559
2	2.129	1.837
3	3.766	3.457
4	5.526	5.201
5	7.272	6.977
6	8.879	8.714



Κτήριο 2		
ΣΕΙΣΜΟΣ Υ-Υ		
Μετατοπίσεις Διαφραγμ.(mm)		
Οροφος Νο	Προγρ.1	ACT
1	0.731	0.442
2	2.104	1.584
3	3.841	3.175
4	5.74	5.012
5	7.652	6.941
6	9.461	8.875





Κτήριο 2					
ΣΕΙΣΜΟΣ Χ-Χ					
Οροφος	Δοκός	Ροπές (kNm) κατά ΑΣΤ		Ροπές (kNm) κατά Πρόγραμμα 1	
		Κόμβος Αρχής	Κόμβος Τέλους	Κόμβος Αρχής	Κόμβος Τέλους
6	12	50.626	58.416	29.42	33.08
	13	13.48	12.353	33.08	29.42
	16	52.268	60.147	29.49	33.12
	17	13.497	12.972	33.12	29.49
3	12	69.7	78.1	32.59	32.85
	13	10.8	9.15	32.85	32.59
	16	101.17	109.8	33.03	33.07
	17	5.8	5.2	33.07	33.03

Κτήριο 2					
ΣΕΙΣΜΟΣ Υ-Υ					
Οροφος	Δοκός	Ροπές (kNm) κατά ΑΣΤ		Ροπές (kNm) κατά Πρόγραμμα 1	
		Κόμβος Αρχής	Κόμβος Τέλους	Κόμβος Αρχής	Κόμβος Τέλους
6	40	2.5	8.2	35.1	39.4
	41	46.6	27.5	35.8	31.7
	44	2.6	8.1	35.1	39.4
	45	47.1	27.6	35.8	31.7
	3	40	1.1	9.4	38.2
3	41	30.3	12.9	35.8	34.9
	44	0.3	10.6	38.3	39.2
	45	26.3	9.25	35.7	34.8

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στους πίνακες και στα διαγράμματα που ακολουθούν παρουσιάζονται οι μετακινήσεις των διαφραγμάτων για το σεισμό κατά  $x$  και  $y$  με βάση τα διάφορα προγράμματα για τους διάφορους τύπους κτιρίων. Στην ανάλυση αυτή δεν έχουν συμπεριληφθεί θεωρήσεις διατμητικής υστέρησης και ειδικότερα θέματα που αφορούν την ακαμψία μελών οπλισμένου σκυροδέματος και η θεώρηση παραμένει στα πλαίσια της ελαστικής γραμμικής ανάλυσης.

Οι αποκλίσεις που παρουσιάζονται δείχνουν τις σχετικές ακαμψίες των προσομοιωμάτων που αποδίδονται στην διαφορετική προσομοίωση των πυρήνων.

Σε ξεχωριστό πίνακα παρουσιάζονται οι αποκλίσεις στα εντατικά μεγέθη των δοκών που συντρέχουν στον πυρήνα. Λόγω των κατακόρυφων μετακινήσεων των ανοικτών άκρων του πυρήνα τα εντατικά μεγέθη αποκλίνουν σημαντικά και δείχνουν τη σημασία της ακριβέστερης προσομοίωσης των πυρήνων.

Οι αποκλίσεις δεν οδηγούν σε συστηματικές διαπιστώσεις καθόσον επηρεάζονται καθοριστικά από το όλο σύμπλεγμα των στοιχείων που απαρτίζουν το συγκεκριμένο κτίριο.

Η προσομοίωση των πυρήνων με επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία έχει θεωρητικά την δυνατότητα να αναδείξει την συμπεριφορά της ανοικτής διατομής καθόσον επιδέχεται μεμβρανικές παραμορφώσεις. Στη περίπτωση αυτή οι μεμβρανικές παραμορφώσεις είναι αυτές που προκύπτουν από την θεωρία της ελαστικότητας χωρίς τον κινηματικό περιορισμό που επιβάλλει η θεωρία ανοικτών διατομών δηλ. ότι η αξονική μετακίνηση είναι ανάλογη της τομιακής ιδιότητας στη συγκεκριμένη θέση. Με την έννοια αυτή η λύση αυτή μπορεί να θεωρηθεί στα πλαίσια της θεωρίας ελαστικότητας ως βάση σύγκρισης. Από τις αναλύσεις προκύπτει ότι η θεωρία των πυρήνων ανοικτής διατομής προσεγγίζει με μεγάλη ακρίβεια τις ελαστικές αναλύσεις.

Απομένει να συνεκτιμηθεί η απομείωση των πραγματικών μεγεθών της στρέβλωσης ανάλογα με το υλικό ώστε να προσομοιώνεται ρεαλιστικότερα η στατική και δυναμική συμπεριφορά των πυρήνων ανοικτής διατομής σε κτιριακά έργα.